Fordybelsesprojekt
Matematik 2, forår 2005
Potensrækker

Arne Jensen

7.–11. marts 2005

1 Indledning

I forbindelse med kurset i Reelle og Komplekse Funktioner afholdes et fordybelsesprojekt med et omfang af 3 ECTS. Dette dokument er oplægget til fordybelsesprojektet. Det er mere detaljeret end et sædvanligt projektoplæg, givet den begrænsede tid der er til projektet. Det er også mere fokuseret, med færre valgmuligheder end i et stort projekt, af samme grund.

I de to følgende afsnit præsenteres en række resultater, og nogle problemstillinger skitseres. Der er et antal steder underafsnit markeret som **Opgave**. Disse indeholder opgaver, beviser, spørgsmål etc., som skal være med i besvarelsen. Andre afsnit er markeret med *Forslag*. Det er forslag til uddybende overvejelser, som gerne skal med, men som ikke er obligatoriske.

I afsnit 4 er der så formuleret en række mere åbne problemstillinger, som man kan arbejde med. Den første problemstilling vedrørende elementære funktioner bør indgå i projektet. De andre efter tid og interesse.

Emnet er potensrækker og deres anvendelse til løsning af differentialligninger, samt forbindelsen til elementære funktioner. Forudsætningerne er dels hele Matematik semesteret efterår 2003, og dels de 4 første kursusgange, med tilhørende opgaver, i kurset Reelle og Komplekse Funktioner.

1.1 Evaluering af projektet

I løbet af ugen skal hver gruppe lave en mini-rapport indeholdende resultaterne af arbejdet med projektet. I den efterfølgende uge vil Arne tage en diskussion med hver gruppe om besvarelsen, for at afslutte evalueringen.

2 Differentialligninger

Vi starter med nogle resultater vedrørende differentialligninger. Følgende resultat forudsættes velkendt. Den Euklidiske norm på $\mathbf{R}^n$ betegnes som sædvanligt med $\|\cdot\|$.

Antagelse 2.1. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et ikke-tomt åbent interval, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ en ikke-tom åben delmængde, og $\mathbf{F}\colon I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ en kontinuert funktion, der for et $M > 0$ opfylder Lipschitz-betingelsen

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq M\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \tag{2.1}$$

for alle $x \in I$ og alle $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega$.

Et system af n første ordens sædvanlige differentialligninger med begyndelsesbetingelse i $x_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ kan da skrives på vektorform som

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2.3}$$

Et hovedresultat er da eksistens- og entydighedsætningen. Vi forudsætter løsningsbegrebet velkendt.

Sætning 2.2. *Lad* $\mathbf{F}$ *opfylde Antagelse* 2.1. *Til enhvert* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in I \times \Omega$ *findes et* $\delta > 0$*, således at* (2.2) *med begyndelsesbetingelsen* (2.3) *har en entydigt bestemt kontinuert differentiabel løsning, defineret på intervallet* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Betragt nu følgende mængde af funktioner, indiceret med parametrene $x_0 \in \mathbf{R}$ og $k \in \mathbf{N}_0$.

Definition 2.3. Lad $x_0 \in \mathbf{R}$ og $k \in \mathbf{N}$. Vi definerer

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^k_{x_0} = \{\mathbf{f} \,|\, &\text{der findes et } \delta > 0, \text{ så at } \mathbf{f}\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}^n \\ &\text{er } k \text{ gange kontinuert differentiabel}\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Bemærk, at definitionsintervallet i denne definition kan variere med funktionen. Man siger ofte, at $\mathbf{f}$ er defineret og k gange kontinuert differentiabel i en omegn af x_0.

Opgave 1. Overvej, at med den naturlige definition af addition af funktioner og skalarmultiplikation, er mængden $\mathcal{V}^k_{x_0}$ et reelt vektorrum.

En af anvendelserne af Sætning 2.2 er et tilsvarende eksistens- og entydighedsresultat for højere ordens sædvanlige differentialligninger. Vi skal her kun se på et specielt tilfælde, nemlig en enkelt anden ordens lineær ligning. Faktisk vil vi koncentrere os om den homogene ligning.

Vi ser først på en ligning af formen

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + q_1(x)\frac{du}{dx}(x) + q_0(x)u(x) = g(x). \tag{2.5}$$

Til en sådan ligning hører to begyndelsesbetingelser

$$u(x_0) = u_0, \quad \frac{du}{dx}(x_0) = u_1. \tag{2.6}$$

Begyndelsesværdiproblemet givet ved (2.5) sammen med (2.6) kan omskrives til et begyndelsesværdiproblem for et første ordens system på følgende måde. Vi tager $n = 2$, $\Omega = \mathbf{R}^2$, og sætter med $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$y_1(x) = u(x), \tag{2.7}$$

$$y_2(x) = \frac{du}{dx}(x), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = (y_2, -q_1(x)y_2(x) - q_0(x)y_1(x) + g(x)). \tag{2.9}$$

Opgave 2. Vis, at med disse definitioner er begyndelsesværdiproblemet (2.5,2.6) ækvivalent med det tilsvarende problem for systemet defineret ovenfor.

Vi har følgende sætning om eksistens og entydighed.

Sætning 2.4. *Antag, at funktionerne q_1, q_0, og g er definerede og kontinuerte på et ikke-tomt åbent interval I. Antag $x_0 \in I$ og $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$. Så findes der et $\delta > 0$, så at problemet givet ved (2.5) og (2.6) har en entydig bestemt to gange kontinuert differentiabel løsning, defineret på $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Opgave 3. Med brug af de andre sætninger formuleret ovenfor, giv et bevis for Sætning 2.4

Hint Vis, at den i (2.9) definerede funktion $\mathbf{F}$ opfylder betingelserne i Antagelse 2.1.

Forslag. *Generalisér ovenstående resultater til en ligning af orden $k \geq 3$ med kontinuerte koefficienter.*

Vi koncentrerer os nu om den homogene ligning. I den forbindelse minder vi om teorien fra basis, se [5, Kapitel 5].

I det følgende antager vi, at q_1 og q_0 er givne kontinuerte funktioner på et interval I. Vi har også fast valgt $x_0 \in I$.

Definition 2.5. Med $\mathcal{N}$ betegnes mængden af løsninger til problemet

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + q_1(x)\frac{du}{dx}(x) + q_0(x)u(x) = 0, \tag{2.10}$$

som tilhører rummet $\mathcal{V}^2_{x_0}$.

Forslag. *Vis, at $\mathcal{N}$ er et underrum af $\mathcal{V}^2_{x_0}$.*

Bemærk, at resultatet kan findes i [5].

Opgave 4. Vis, at $\mathcal{N}$ er et to-dimensionalt vektorrum. Som basis kan vælges funktionerne u og v, som begge løser (2.10), og som opfylder følgende begyndelsesbetingelser:

$$u(x_0) = 1, \qquad \frac{du}{dx}(x_0) = 0, \tag{2.11}$$

$$v(x_0) = 0, \qquad \frac{dv}{dx}(x_0) = 1. \tag{2.12}$$

Forslag. *Slut ud fra ovenstående, at der findes et $\delta_{\min}$, således at alle løsninger til begyndelsesværdiproblemet for den homogene ligning mindst er definerede (og er løsninger) på et interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ med $\delta \geq \delta_{\min}$.*

Forslag. *Forklar sammenhængen mellem den fuldstændige løsning til en inhomogen anden ordens ligning, og rummet $\mathcal{N}$.*

Vi bemærker, at ligningen (2.5) sommetider betragtes i den lidt mere generelle form

$$p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)u(x) = g(x). \tag{2.13}$$

Her antager vi, at alle p_j, $j = 0, 1, 2$, og g er kontinuerte på et interval I. Hvis $x_0 \in I$ er et punkt hvor $p_2(x_0) \neq 0$, så kan vi bestemme et interval $J \subseteq I$ med $x_0 \in J$ og $p_2(x) \neq 0$ for *alle* $x \in J$. Dermed kan vi dividere igennem med p_2, og ligningen er reduceret til formen (2.5), men muligvis på et *mindre* interval J.

Tilfældet $p_2(x_0) = 0$ er vigtigt, og optræder i en del ligninger fra den matematiske fysik. Se afsnit 4.3 nedenfor.

3 Potensrækkeløsning til differentialligning

Vi bruger i det følgende resultater fra [6] vedrørende potensrækker. Vi minder blandt andet om, at en funktion givet ved en potensrække med konvergensradius $\rho > 0$ er uendeligt ofte differentiabel. Vi minder også om, at koefficienterne er entydigt bestemt. Se [6, Afsnit 7.2].

Vi fortsætter med samme notation som ovenfor, og gentager ikke antagelser om interval I etc. Der gælder følgende generelle sætning.

Sætning 3.1. *Antag at q_1 og q_0 kan udvikles i potensrækker omkring x_0, begge med konvergensradius mindst $\rho > 0$. Så kan enhver løsning til den homogene ligning* (2.10) *udvikles i en potensrække om x_0 med konvergensradius mindst ρ.*

Denne sætning skal ikke bevises her generelt. (Når en del af teorien for analytiske funktioner er gennemgået, så kan man give et bevis, baseret på fixpunktsætningen.) Men vi bruger den som motivation for en løsningsmetode til differentialligninger, som baserer sig på at finde løsninger i form af en potensrække. Man gætter på en løsning i form af en potensrække med ukendte koefficienter, og forsøger derefter først at bestemme koefficienterne, og dernæst at vise, at konvergensradius for den fundne potensrække er positiv.

Der gælder et resultat svarende til Sætning 3.1 for en første ordens homogen ligning

$$\frac{dy}{dx}(x) + q_0(x)y(x) = 0, \tag{3.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{3.2}$$

hvis q_0 kan udvikles i en potensrække omkring x_0.

Vi vil nu først illustrere fremgangsmåden i et tilfælde, hvor løsningen er kendt. I de to næste eksempler ser vi på en anden ordens ligning, hvor løsningerne ikke er kendte.

3.1 Eksempel 1

Vi ser på problemet

$$\frac{dy}{dx}(x) - y(x) = 0, \tag{3.3}$$

$$y(0) = 1, \tag{3.4}$$

Vi starter med at regne formelt. Antag, at løsningen kan udvikles i en potensrække omkring nul:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.5}$$

Vi har da

$$\frac{dy}{dx}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}. \tag{3.6}$$

Vi skifter summationsindex og sætter ind i differentialligningen (3.3), således at vi får

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)a_{n+1} - a_n\right) x^n = 0. \tag{3.7}$$

På grund af entydighed af koefficienter må vi derfor have

$$(n+1)a_{n+1} - a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.8}$$

Man viser ved induktion, at der så må gælde

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.9}$$

hvor som sædvanligt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Af begyndelsesbetingelsen (3.4) følger $a_0 = 1$. Denne udregning viser dermed, at eneste mulighed for koefficienterne i potensrækken er $a_n = 1/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

har konvergensradius $\rho = \infty$. Da funktionen defineret ved

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{3.10}$$

er kontinuert differentiabel, og opfylder såvel differentialligningen (3.3) som begyndelsesbetingelsen (3.4), er dette den entydige løsning til begyndelsesværdiproblemet.

Disse overvejelser kan bruges på flere måder. Man kan forudsætte, at den naturlige eksponentialfunktion $\exp(x)$ er velkendt. Men da den også er en løsning til problemet givet ved (3.3) og (3.4), giver entydigheden, at vi har bevist at

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbf{R}.$$

En anden mulighed er at tage udgangspunkt i ovenstående for at definere den naturlige eksponentialfunktion.

Opgave 5. Gennemgå ovenstående eksempel i detaljer.

Opgave 6. Brug (3.10) som udgangspunkt for at indføre den naturlige eksponentialfunktion. Vis så mange af dens forventede egenskaber som muligt. For eksempel skal den opfylde $y(x_1 + x_2) = y(x_1)y(x_2)$.

3.2 Eksempel 2

Vi giver nu et eksempel på løsning af en anden ordens differentialligning ved hjælp af potensrækkemetoden fra Eksempel 1. Vi ser på differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) - 2x\frac{dy}{dx}(x) - 2y(x) = 0$$

omkring $x_0 = 0$. Som ovenfor starter vi med formelle udregninger, som senere begrundes.

Gæt på

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

og sæt ind i ligningen

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

For at kunne sammenligne koefficienterne skifter vi summationsindeks til $n-2$ i den første sum. I den anden sum ganger vi x ind på leddene. Det giver

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Da højre side er funktionen, der er identisk nul, må koefficienten til x^n på venstre side også være nul. Dermed har vi

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eller

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dette er en rekursionsrelation til bestemmelse af koefficienterne. Vi skal angive to værdier for a_n-erne for at kunne fastlægge dem. Svarende til, at vi normalt fastlægger $y(0)$ og $y'(0)$, vil vi her fastlægge a_0 og a_1. Som i Opgave 4 ovenfor får vi to lineært uafhængige løsninger ved at vælge $(a_0, a_1) = (1, 0)$ og $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

Vi starter med $(a_0, a_1) = (1, 0)$. Vi finder hurtigt

$$a_2 = a_0 = 1, \qquad a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}.$$

Ved et induktionsbevis fås den generelle formel

$$a_{2n} = \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} = \frac{1}{n!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Da $a_1 = 0$, får vi, at alle koefficienter med ulige indeks er nul:

$$a_{2n+1} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

(Man skal ikke lade sig forvirre af, at indeks n optræder i så mange sammenhænge.)

Vi har da fundet den første løsning. Den kan endda udtrykkes på lukket form. Vi sætter ind:

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots$$

og ser $y(x) = e^{x^2}$.

Med betingelserne $(a_0, a_1) = (0, 1)$ bliver alle koefficienter med lige indeks nul, og for dem med ulige indeks får vi

$$a_3 = \frac{2a_1}{3}, \qquad a_5 = \frac{2a_3}{5} = \frac{2}{5}\frac{2}{3}, \qquad a_7 = \frac{2a_5}{7} = \frac{2}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3}.$$

Ved et induktionsbevis fås den generelle formel

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Den anden løsning er derfor givet ved

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}\, x^{2n+1}.$$

Der findes ikke noget enklere udtryk for denne funktion. Man kan nu retfærdiggøre disse udregninger ved direkte at eftervise, at de to uendelige rækker begge har konvergensradius $+\infty$, og derfor er de udførte regninger ikke blot formelle, men faktisk korrekte.

Opgave 7. Gennemfør ovennævnte overvejelser.

3.3 Eksempel 3

Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) - xy(x) = 0$$

kaldes Airys differentialligning. Den kan ikke løses ved brug af elementære funktioner. Men man kan finde to lineært uafhængige løsninger ved hjælp af potensrækkemetoden, og disse løsninger kan bruges til at undersøge løsningernes egenskaber i detaljer. Se [4, Example 5, p. 765], hvor udregningerne er gennemført i detaljer.

4 Projektforslag og -idéer

Baseret på ovenstående teknik til at finde løsninger til første og anden ordens differentialligninger kan man arbejde videre i forskellige retninger.

4.1 Potensrækker og elementære funktioner

Vi har i Eksempel 1 ovenfor, som formuleret i Opgave 6, set at man kan bruge differentialligninger og potensrækker til at indføre, og til at udlede egenskaber ved, elementære funktioner. Prøv at indføre de elementære funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ som to løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) + y(x) = 0.$$

Hvor mange af de kendte egenskaber for disse to funktioner kan udledes ved hjælp af differentialligninger og potensrækker?

Her er nogle af de kendte egenskaber:

$$\begin{gathered}
\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x), \\
\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \\
\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \\
\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2), \\
\sin(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\sin(x_2) + \sin(x_1)\cos(x_2).
\end{gathered}$$

Prøv tilsvarende fremgangsmåde for nogle af de elementære funktioner

$$\ln(x), \quad \cosh(x), \quad \sinh(x), \quad \tan(x), \quad \tanh(x).$$

Metoden er ikke altid anvendelig.

Hvor kommer de elementære funktioner fra, og hvordan er de tidligere blevet defineret eller postuleret? Se også [5, Kapitel 2]

Find nogle egenskaber ved $\cos(x)$ og $\sin(x)$, som det ikke umiddelbart er muligt at finde ved hjælp af differentialligninger og potensrækker.

4.2 Binomialrækken

Der er en formel, som generaliserer binomialformlen

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k},$$

hvor binomialkoefficienterne er givet ved

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Generalisationen er binomialrækken givet for ethvert $\alpha \in \mathbf{R}$ ved

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

hvor de generaliserede binomialkoefficienter er givet ved

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dette resultat kan vises ved hjælp af potensrækkemetoden til løsning af differentialligninger. Her er nogle trin at gennemføre.

- På intervallet $I = (-1, \infty)$ er $u(x) = (1+x)^\alpha$ den entydige løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$(1+x)\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0, \quad y(0) = 1.$$

- Ved anvendelse af potensrækkemetoden til løsning af dette problem finder man ovenstående række.
- Bestem konvergensradius for binomialrækken (bemærk, at svaret afhænger af, om α er et ikke-negativt heltal, eller ej).

Som en anvendelse af binomialrækken kan man bestemme potensrækkeudviklingen for den inverse trigonometriske funktion $\arcsin(x)$ omkring $x_0 = 0$. *Hint*: Se på $\frac{d}{dx}\arcsin(x)$.

4.3 Generalisation af teorien 1

En del af resultaterne præsenteret ovenfor kan generaliseres på forskellig vis. Mange vigtige differentialligninger i den matematiske fysik kommer i en anden form end den, der er antaget i (2.5). De kommer ofte i formen

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dy}{dx}(x) + p_0(x)y(x) = 0, \tag{4.1}$$

hvor p_j, $j = 0, 1, 2$, er kontinuerte funktioner på et interval I. Begyndelsesbetingelser er givet i et punkt $x_0 \in I$. Der er tre tilfælde at betragte. I tilfældet $p_2(x_0) \neq 0$ siges x_0 at være et *regulært punkt*. Dette tilfælde reduceres til det allerede betragtede, ved division med p_2. I dette tilfælde er $q_1(x) = p_1(x)/p_2(x)$ og $q_0(x) = p_0(x)/p_2(x)$ begge kontinuerte i et lille interval omkring x_0.

Hvis $p_2(x_0) = 0$, så kaldes x_0 et *singulært punkt*. Her skelner man mellem det tilfælde, hvor

$$(x - x_0)\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad \text{og} \quad (x - x_0)^2\frac{p_0(x)}{p_2(x)}$$

begge har potensrække udviklinger om x_0 med positiv konvergensradius, og det tilfælde, hvor denne antagelse ikke er opfyldt. I det første tilfælde kaldes x_0 for et *regulært singulært punkt*.

Man kan se på nogle enkle tilfælde, hvor man kan regne sig igennem tingene. Det første eksempel er Eulers ligning

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}(x) + \beta x\frac{dy}{dx}(x) + \alpha y(x) = 0, \tag{4.2}$$

hvor α og β er reelle konstanter. Man kan gætte på en løsning på formen $y(x) = x^r$. Ved indsætning finder man da en andengrads ligning for r.

I det generelle tilfælde, hvor x_0 er et regulært singulært punkt, gætter man på en løsning af formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

hvor r bestemmes på tilsvarende vis. Denne løsningsmetode kaldes Frobenius metode.

4.4 Generalisation af teorien 2

Hvis man ved mere om koefficienterne i ligningen (2.5), kan man også sige mere om løsningerne. For eksempel, hvis $q_1(x)$ og $q_0(x)$ begge er k gange kontinuert differentiable på intervallet I, så er alle løsninger til den homogene ligning $k + 2$ gange kontinuert differentiabel på eksistensintervallet.

Man kan også stille spørgsmålet om hvor stort eksistensintervallet er. Eksisterer løsningen på hele intervallet I? Et konkret eksempel, hvor svaret er kendt fra [5], er tilfældet med $q_1(x)$ og $q_0(x)$ konstante funktioner. Så er løsningen defineret på hele den reelle akse. Hvad kan man sige mere generelt, i tilfældet med ikke-konstante koefficienter?

4.5 Konkrete ligninger

Der er en række konkrete ligninger, hvor man kan prøve metoden. Her er nogle eksempler.

1. Lad λ betegne en konstant. Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) - 2x\frac{dy}{dx}(x) + \lambda y(x) = 0$$

kaldes *Hermites* differentialligning. Den optræder mange steder i matematik og fysik. Her er nogle forslag til undersøgelser.

- Bestem to lineære uafhængige løsninger.
- Vis, at Hermites ligning har en løsning, der er et polynomium af grad n, hvis $\lambda = 2n$. Dette polynomium kaldes Hermite polynomiet (efter en passende normalisering).

2. Lad α betegne en konstant. Ligningen

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}(x) - 2x\frac{dy}{dx}(x) + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0$$

kaldes *Legendres* ligning.

- Bestem to lineært uafhængige løsninger til Legendres ligning
- Antag, at $\alpha = n$ (helt tal). Vis, at Legendres ligning har et polynomium af grad n som løsning. Det kaldes Legendre polynomiet.
- Legendre polynomiet $P_n(x)$ normalises ved betingelsen $P_n(1) = 1$. Bestem $P_j(x)$ for $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

3. Lad ν være en reel og positiv konstant. *Bessels* ligning af orden ν er ligningen

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}(x) + x\frac{dy}{dx}(x) + (1-\nu^2)y(x) = 0$$

- Find en potensrækkeløsning til ligningen med begyndelsesbetingelserne $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.
- Kan man finde en af ovenstående lineært uafhængig løsning, i form af en potensrække? Hvis nej, hvad kan man så gøre (se afsnit 4.3)?

4.6 Hypergeometriske funktioner

En klasse af funktioner, som optræder mange steder i matematikken og dens anvendelser, er de hypergeometriske funktioner. De er løsninger til differentialligningen

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}(x) + (c-(a+b+1)x)\frac{dy}{dx}(x) - aby(x) = 0, \tag{4.3}$$

Her er a, b, og c tre parametre, der kan være komplekse, men her ser vi kun på reelle parametre. Ligningen er et specialtilfælde af ligningen betragtet i afsnit 4.3 ovenfor.

Man kan undersøge potensrække metodens anvendelighed til at bestemme eksistens af løsninger i form af potensrækker, og deres konvergensradier. Andre forslag:

1. Vis, at for $a = 1$, $b = 1$, og $c = 2$, er $y(x) = -x^{-1}\log(1-x)$ en løsning.

2. Vis, at hvis a eller b er et negativt heltal, så har ligningen et polynomium som løsning.

De hypergeometriske funktioner er relaterede til hypergeometriske distributioner i sandsynlighedsteori. Forsøg at finde sammenhængen.

5 Supplerende læsning

Man kan mange steder læse om potensrækkemetoden til løsning af differentialligninger. Her er nogle forslag. Lærebogen i Calculus fra basis [4]. Se afsnittene 11.9 og 11.10. Metoden er også beskrevet i et af de efterfølgende bind i lærebogsserien [5]. Lærebogen fra efterårets PE kursus indeholder meget om metoden, se Chapter 7 i [3].

Frobenius metoden (nævnt i afsnit 4.3) er beskrevet i blandt andet [2], og også i [3]. Funktionerne med navne som Airy, Bessel, Hermite, Laguerre, Legendre osv. kaldes ofte *specielle funktioner*, og mange bøger og tabelværker beskriver deres egenskaber og værdier. En klassisk bog er [1]. Her kan man se i Chapter 15 vedrørende de hypergeometriske funktioner og deres egenskaber.

I dag er mange af de specielle funktioners egenskaber indbygget i computer algebra programmer, som for eksempel Maple. Men det er ikke altid let at trække relevant information ud af Maple, og det er heller ikke så let at anvende Maple til at finde potensrække løsninger.

Et eksempel, hvor man kan finde informationer og metoder i Maple, er om de hypergeometriske funktioner. Se i `DEtools` pakken under `hypergeomsols`.

En anden kilde til information om emnerne i fordybelsesprojektet er internettet. Man kan søge på emner nævnt ovenfor, men problemet er, at man ikke kan vide noget om lødigheden af de informationer man finder. Et eksemple, hvor man får nyttig viden om de hypergeometriske funktioner, er siden

`http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html`

Litteratur

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1970. (Findes også i andre udgaver.)

[2] M. Braun: *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag. (Findes i flere udgaver.)

[3] B. C. Conrad: *Differential Equations with Boundary Value Problems*, Prentice Hall 2003.

[4] C. H. Edwards, D. E. Penney: *Calculus*, 6th Edition, Prentice Hall 2002.

[5] H. Elbrønd Jensen *et al.*: *Matematisk Analyse* I, 4. Udgave, Institut for Matematik, DTU, August 1998.

[6] W. R. Wade: *An Introduction to Analysis*, Third Edition, Prentice Hall, 2004.