

**Det teknisk-naturvidenskabelige basisår**  
**Matematik 2A, Forår 2006, Hold 3**  
**Prøveopgave A**

Opgaven består af et antal delopgaver. Disse er af varierende omfang. Der er også en del forklarende tekst ind imellem.

Formålet med denne opgave er at forstå et af de allervigtigste resultater i Lineær Algebra. Det er, at Gauss elimination fører til, at løsning af et lineært ligningssystem (her  $n$  ligninger med  $n$  ubekendte) kan reduceres til at løse to triangulær ligningssystemer, som umiddelbart kan løses ved substitution (fremad i det ene tilfælde, tilbage i det andet). Dette fører til en reduktion af antallet af regneoperationer, når man skal løse et ligningssystem mange gange, med en fast koefficientmatrix og varierende højresider. Vi starter med to konkrete lineære ligningssystemer.

I forbindelse med besvarelsen af opgaven skal man også gøre rede for teorien. Man kan selv i besvarelsen inddrage teori. Derudover vil der til hver eksaminands besvarelse blive stillet nogle teoretiske spørgsmål.

**Delopgave 1.** Der er givet et lineært ligningssystem

$$\begin{aligned}4x_1 + 8x_2 + 12x_4 &= 4 \\2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 &= 4 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3\end{aligned}$$

Find den fuldstændige løsning til dette ligningssystem ved hjælp af rækkeoperationer. Opskriv løsningen på parametriceret vektorform.

**Delopgave 2.** Et lineært ligningssystem med fire ubekendte og fire ligninger er givet ved koefficientmatricen  $A$  og højresiden  $\mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & -2 \\ 3 & 1 & a & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Her er  $a$  og  $b$  vilkårlige tal. For hvilke værdier af  $a$  og  $b$  er ligningssystemet konsistent? For disse værdier skal man bestemme den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

**Delopgave 3.** For alle  $a$  skal man bestemme en basis for nulrummet for den lineære afbildning givet ved matricen  $A$  i (1). Tilsvarende skal man bestemme en basis for billedrummet for denne afbildning. Angiv dimensionen af de to underrum af  $\mathbf{R}^4$ .

**Definitioner.** I de følgende opgaver skal vi bruge nogle definitioner. Vi ser kun på kvadratiske  $n \times n$  matricer. Vi skriver en generel matrix som  $A = [a_{ij}]$ . De to indices opfylder  $1 \leq i \leq n$  og  $1 \leq j \leq n$ . En *øvre trekantsmatrix* er en matrix, der opfylder  $a_{ij} = 0$  for alle  $i > j$ . En *nedre trekantsmatrix* er en matrix, der opfylder  $a_{ij} = 0$  for alle  $i < j$ . Her er et konkret eksempel på en af hver type.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

En trekantsmatrix siges at være *unital*, hvis alle diagonalindgangene er lig 1, d.v.s.  $a_{ii} = 1$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . To eksempler:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Delopgave 4.** Lad  $A$  og  $B$  være  $n \times n$  øvre trekantsmatricer. Gør rede for, at deres produkt  $AB$  er en øvre trekantsmatrix. Tilsvarende for nedre trekantsmatricer. Hvilke matricer er både øvre og nedre trekantsmatricer? Hvilke matricer er både øvre og nedre unitale trekantsmatricer?

**Delopgave 5.** Lad  $A = [a_{ij}]$  være en  $n \times n$  øvre eller nedre trekantsmatrix. Vis, at i begge tilfælde gælder, at determinanten af  $A$  er lig produktet af diagonalindgangene i  $A$ , altså

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Konkluder, at en trekantsmatrix er invertibel, hvis og kun hvis  $a_{ii} \neq 0$  for alle  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Delopgave 6.** Lad  $A$  være en unital nedre trekantsmatrix. Vis ved hjælp af rækkeoperationer, at den inverse til  $A$  også er en unital nedre trekantsmatrix. Start eventuelt med en konkret matrix med talindgange for at forklare resultatet.

**Delopgave 7.** Lad  $A$  være en kvadratisk øvre trekantsmatrix. Et konsistent ligningssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  kan løses ved at substituere bagfra, altså uden at finde

den reducerede echelonform. Illustrér metoden ved hjælp af følgende matrix  $A$  og vektor  $\mathbf{b}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Gør rede for, at hvis  $B$  er en nedre trekantsmatrix, så kan man finde løsningen til et konsistent ligningsystem  $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$  ved fremadgående substitution, uden at skulle finde echelonform eller reduceret echelonform. Illustrér metoden ved eksemplet

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

**Forklaring.** I resten af opgaven skal vi se på en vigtig konsekvens af Gauss-eliminationen for et ligningsystem. Vi ser for enkelhedens skyld kun på et ligningsystem med  $n$  ligninger og  $n$  ubekendte, således at koefficientmatricen er kvadratisk. Vi starter med resultaterne fra Lay vedrørende rækkeoperationer og elementære matricer.

Vi har givet en  $n \times n$  matrix  $A = [a_{ij}]$ . Hvis vi vil fremhæve rækkerne, så kan vi skrive den som en søjle af rækkevektorer

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

De tre rækkeoperationer kan da beskrives ved følgende transformationer.

1. Multiplicér række  $k$  med konstanten  $c \neq 0$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

2. Læg  $c$  gange række  $k$  til række  $l$ ,  $k \neq l$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l + c \cdot \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

3. Ombyt række  $k$  og række  $l$ ,  $k \neq l$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

Den elementære matrix svarende til den første rækkeoperation er givet ved

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j, i \neq k, \\ c & \text{for } i = j, i = k. \end{cases} \quad (2)$$

Den elementære matrix svarende til den anden rækkeoperation er givet ved

$$(F)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ c & \text{for } i = l, j = k, \\ 0 & \text{for alle andre } i \text{ og } j. \end{cases} \quad (3)$$

Den elementære matrix svarende til den tredje rækkeoperation er givet ved

$$(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, i \neq k, i \neq l, \\ 1 & \text{for } i = k, j = l, \\ 1 & \text{for } i = l, j = k, \\ 0 & \text{for alle andre } i \text{ og } j. \end{cases} \quad (4)$$

**Delopgave 8.** Forklar i detaljer ovenstående og giv nogle konkrete taleksempler. Vis, at enhver elementær matrix er invertibel, og bestem den inverse matrix til hver af de tre typer elementære matricer. Beskriv de inverse matricer både med ord (hvilken rækkeoperation implementerer den inverse) og ved formler som (2), (3), og (4).

**Delopgave 9.** Der er givet en  $n \times n$  matrix  $A$ . Gør rede for, processen med rækkeoperationer, der fører til echelonformen for  $A$  (vi kalder den  $B$ ), kan beskrives som multiplikation til venstre med elementære matricer, dvs.

$$B = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Her er hver  $E_j$  en af de elementære matricer. Gør rede for, at man altid kan gennemføre processen uden at bruge elementære matricer af typen (2). Brug matrixen  $A$  fra (1) med  $a = 0$  til at illustrere disse ting.

**Delopgave 10.** Antag, at en matrix  $A$  kan reduceres til echelonform alene ved at bruge elementære matricer af typen (3), og at man i hvert trin kun anvender operationerne på rækkerne *under* den aktuelle pivotrække (præcis som beskrevet i starten af Chapter 1 i Lay til opnåelse af echelonform). Vis, at der så findes en unital nedre trekantsmatrix  $L$  og en øvre trekantsmatrix  $U$ , således at

$$A = LU. \tag{5}$$

Faktoriseringen (5) kaldes  $LU$ -faktoriseringen. Antag nu, at vi skal løse ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , og at ligningssystemet er konsistent. Antag også, at vi allerede kender  $LU$ -faktoriseringen (5). Vis, at så kan ligningssystemet løses ved at løse de to systemer

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{og} \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{6}$$

Disse to systemer kan løses direkte ved substitution, som set i Delopgave 7.

**Kommentar.** I mange anvendelser skal man ofte løse et ligningssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  for mange forskellige højresider. En direkte løsning ved at bruge rækkeoperationer kræver cirka  $n^3$  beregninger. En  $LU$  faktorisering kræver også cirka  $n^3$  beregningen, men den efterfølgende løsning af ligningssystemer med metoden i (6) kræver kun cirka  $n^2$  beregninger.

**Delopgave 11.** Antag, at der er givet en  $LU$  faktorisering af  $A$ , som i (5). Vis, at

$$\det A = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn},$$

hvor  $u_{ii}$  betegner diagonalindgangene i  $U$ . Vis, at en direkte udregning af  $\det A$  efter definitionen i Lay kræver cirka  $n!$  beregninger. Som angivet i kommentaren ovenfor, så kræver beregning af  $\det A$  med  $LU$  faktoriseringen cirka  $n^3$  beregninger. Sammenlign disse to størrelser for f. eks.  $n = 10$  og  $n = 20$ .

**Delopgave 12.** Bestem en  $LU$  faktorisering af matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 11 & 4 \\ -3 & -4 & -10 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se Lay Section 2.5 for metoden.

**Delopgave 13.** Lad  $P$  betegne en  $n \times n$  matrix, som er fremkommet ved at ombytte (permutere) nogle af rækkerne i  $n \times n$  enhedsmatricen  $I_n$ .  $P$  kaldes en permutationsmatrix. Bemærk, at vi har  $PI_n = P$ . Det viser, at  $P$  er bestemt ved permutationer af rækkerne i  $I_n$ . Lad  $A$  være en vilkårlig  $n \times n$  matrix. Gør rede for, at  $PA$  giver en matrix med rækkerne i  $A$  ombyttet på samme måde som i  $P$ . Start gerne med taleksempler. Gør rede for, at enhver  $n \times n$  matrix kan faktoriseres som

$$A = PLU, \tag{7}$$

hvor  $P$  er en permutationsmatrix,  $L$  en unital nedre trekantsmatrix, og  $U$  en øvre trekantsmatrix. *Hint:* Start med at gennemføre den sædvanlige reduktion til echelonform. Notér undervejs de nødvendige rækkeombytninger. Det tillader én at konstruere en permutationsmatrix  $Q$ , således at  $QA$  opfylder betingelserne i Delopgave 10.

**Bemærk.** Permutationsmatricer kommuterer ikke altid. Giv et eksempel herpå.

**Delopgave 14.** Lad  $A$  være matricen i (1) med  $a = 0$ . Bestem en faktorisering af  $A$  af typen (7). Genbrug gerne nogle af udregningerne fra Delopgave 9.