Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Matematik 2A, Forår 2006, Hold 3
Prøveopgave B

Opgaven består af et antal delopgaver. Disse er af varierende omfang. Der er også en del forklarende tekst ind imellem.

Formålet med denne opgave er se på nogle anvendelser af den lineære algebra. Anvendelserne er polynomial interpolation, udledelse af endelig differensformler til approksimation af afledede, og numerisk differentiation.

I forbindelse med besvarelsen af opgaven skal man også gøre rede for teorien. Man kan selv i besvarelsen inddrage teori. Derudover vil der til hver eksaminands besvarelse blive stillet nogle teoretiske spørgsmål.

Interpolation. Vi starter med at se på begrebet polynomial interpolation. Der er givet et antal punkter i planen:

$$(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \ldots, (t_n, x_n).$$

Vi antager, at $t_i \neq t_j$ for $i \neq j$. Opgaven er at bestemme et polynomiun $p(t)$ af grad højst n, således at alle de givne punkter ligger på grafen $x = p(t)$ for polynomiet, d.v.s. $p(t_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Et sådant polynomium siges at interpolere mellem de givne punkter. Et polynomium af grad højst n kan skrives på formen

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n.$$

Delopgave 1. Gør rede for, at bestemmelsen af polynomiet $p(t)$ kan reduceres til løsning af $n+1$ ligninger med $n+1$ ubekendte. Givet punkterne

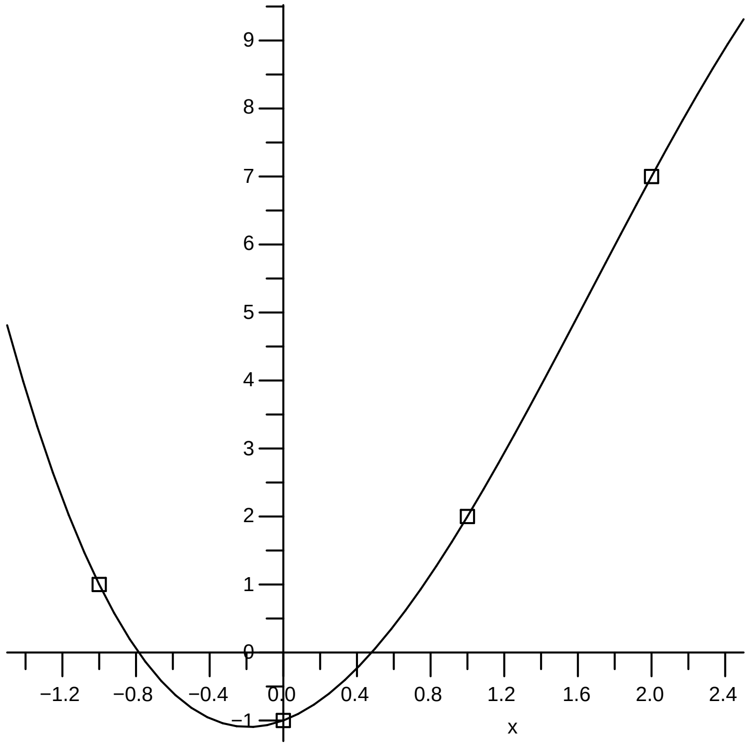
$$(-1, 1), (0, -1), (1, 2), (2, 7),$$

find det polynomium af grad højst tre, der interpolerer mellem de givne punkter. Opstil det lineære ligningssystem og løs det. Løsningen er illustreret i Figur 1.

Delopgave 2. Antag, at $t_i \neq t_j$ for alle $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Opskriv koefficientmatricen for systemet af $n+1$ lineære ligninger (de ubekendte er koefficienterne i $p(t)$)

$$p(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Vis, at søjlerne i denne matrix er lineært uafhængige. Slut heraf, at der eksisterer et entydigt bestemt interpolerende polynomium for punkterne (t_i, x_i), $i = 0, \ldots .n$. *Hint*: For at vise, at søjlerne er lineært uafhængige, kan man udnytte, at et polynomium af grad n højst har n forskellige rødder.



Figur 1: Punkter og graf af polynomium fra Delopgave 1.

Anvendelse af interpolation. Antag, at vi har en funktion $f(t)$, som vi kun kender værdierne af i nogle punkter, for eksempel punkter af formen $t_j = t_0 + jh$ for nogle værdier af j. D.v.s. vi kender $x_j = f(t_j)$. Vi vil gerne finde værdien af $f'(t_j)$. Dette kaldes numerisk differentiation. Vi kan anvende følgende fremgangsmåde. Ud fra de kendte værdier (t_j, x_j) bestemmer vi et interpolerende polynomium $p(t)$. Dette polynomium kan vi differentiere, og vi vil så anvende værdien $p'(t_j)$ som en approksimation til $f'(t_j)$. Denne metode fører frem til såkaldte endelig differens formler som approksimation til de afledede.

Delopgave 3. Vi skal nu udlede to af disse formler. Vi baserer formlerne på de to nærmeste nabopunkter til et givet punkt. For at forenkle udregningerne tager vi punkterne

$$(-h, x_{-1}), (0, x_0), (h, x_1),$$

hvor $h > 0$. Bestem det interpolerende polynomium $p(t)$ af grad højst 2 for disse tre punkter. Brug rækkeoperationer til at løse det lineære ligningssystem. Beregn derefter $p'(0)$ og $p''(0)$. Resultatet er følgende formler:

$$\text{Approksimation til første afledede:} \qquad \frac{x_1 - x_{-1}}{2h}, \tag{1}$$

$$\text{Approksimation til anden afledede:} \qquad \frac{x_1 + x_{-1} - 2x_0}{h^2}. \tag{2}$$

Kommentar. Man vil forvente, at når h er lille, så giver ovenstående metode en god approksimation til de afledede. Ved hjælp af Taylors formel kan man analysere, hvor god approksimationen er. Det vil vi nu kort gøre. Vi antager, at f er tre gange kontinuert differentiabel. Vi opskriver Taylors formel to gange, med udviklingspunkt 0 og funktionsværdi beregnet i henholdsvis h og $-h$. Resultatet er de to formler

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(0) + h^3 R_1(h), \tag{3}$$

$$f(-h) = f(0) - hf'(0) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(0) + h^3 R_2(h). \tag{4}$$

Heraf får vi

$$\frac{f(h) - f(-h)}{2h} = f'(0) + \tfrac{1}{2}h^2(R_1(h) - R_2(h))$$

og

$$\frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2} = f''(0) + h(R_1(h) - R_2(h)).$$

Da $x_j = f(0 + jh)$, $j = -1, 0, 1$, har vi altså, at formlen (1) approksimerer $f'(0)$ med en fejl af størrelsesordenen h^2, og at formlen (2) approksimerer $f''(0)$ med en fejl af størrelsesordenen h.

Ekstraopgave. Gennemfør overvejelserne ovenfor i detaljer.

Forskydninger. Vi skal anvende ovenstående til at udlede formlen for en differentiationsmatrix. Før vi kan gøre dette, skal vi se på nogle lineære afbildninger. Lad $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Vi definerer en afbildning S ved

$$S\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Delopgave 4. Vis, at S er en lineær afbildning $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, og find standardmatricen for afbildningen S.

Delopgave 5. Vis, at S er invertibel, og bestem standardmatricen for S^{-1}. Vis, at $S^n = I$, d.v.s. S sammensat med sig selv n gange giver identiteten.

Komplekse vektorrum. I stedet for $\mathbf{R}^n$ kan man også se på komplekse vektorrum $\mathbf{C}^n$. Alle resultater for $\mathbf{R}^n$ gælder også for $\mathbf{C}^n$. Det man yderligere opnår ved at bruge de komplekse tal er, at man har konjugering som en ny operation. Hvis $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, så definerer man $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n)$. Derudover har man jo, at ethvert polynomium af grad m har præcis m komplekse rødder, talt med multiplicitet. Det betyder specielt, at det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda I)$ for en $n \times n$ matrix A altid har n rødder.

Delopgave 6. Overvej ovenstående om komplekse vektorrum. Gør rede for, at begreberne frembringende sæt af vektorer, lineær uafhængighed af et sæt af vektorer, og basis for et underrum af $\mathbf{C}^n$ overføres uændret til det komplekse tilfælde, bortset fra at skalarerne nu er fra $\mathbf{C}$. Lad B være en $n \times n$ matrix med reelle indgange. Vi kan opfatte den som en afbildning af $\mathbf{C}^n$ ind i $\mathbf{C}^n$. Vis, at hvis λ er en egenværdi for B med tilhørende egenvektor $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$, så er den kompleks konjugerede $\overline{\lambda}$ også en egenværdi for B med egenvektor $\overline{\mathbf{z}}$.

Delopgave 7. Lad A betegne matricen for den lineære afbildning S defineret i (5). Vi opfatter A som en afbildning af $\mathbf{C}^n$ ind i $\mathbf{C}^n$ og skal bestemme samtlige egenværdier for A. Antag, at λ er en egenværdi for A. Vis, at så gælder der $\lambda^n = 1$.

Delopgave 8. Vi fortsætter med at lade λ betegne en egenværdi for A fra foregående delopgave. Find samtlige løsninger til den komplekse binome ligning $\lambda^n = 1$. Løsningerne betegnes med λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Vis, at hvert λ_j er en egenværdi for A, og bestem en tilhørende egenvektor. *Hint*: For at finde egenvektorer kan man se på vektorer af formen $(1, \lambda_j, \lambda_j^2, \ldots, \lambda_j^{n-1})$.

Delopgave 9. Vis, at der findes en basis for $\mathbf{C}^n$ bestående af egenvektorer for A. Vis, at det samme gælder for matricen for S^{-1}, nemlig A^{-1}, og bestem også egenværdierne for denne matrix.

Differentiationsmatricer. Vi vender nu tilbage til approksimationen til den første afledede givet ved (1). Tag en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Vi kan antage, at x_j er fremkommet ved at sample en funktion $x_j = f(t_0 + (j-1)h)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, og vil nu gerne finde en approksimation til den afledede af denne funktion i disse sample punkter. Problemet med dette er, at vi kommer til at mangle information om funktionen i endepunkterne af intervallet vi sampler over. Det problem løser vi ved at periodisere, d.v.s. vi opfatter følgen af værdier gentaget som vist her

$$\ldots, x_{n-1}, x_n, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n}_{\text{den givne vektor}}, x_1, x_2, \ldots.$$

Vi kan nu anvende differentiationsformlen (1) for hvert x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Når vi får brug for venstre nabopunkt til x_1, så tager vi værdien x_n, og tilsvarende, som højre nabopunkt til x_n tager vi x_1. Vi definerer nu for et valgt $h > 0$ en afbildning D_h ved

$$D_h \colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} x_2 - x_n \\ x_3 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-2} \\ x_1 - x_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Delopgave 10. Vis, at man kan udtrykke D_h ved S fra (5) som

$$D_h = \frac{1}{2h}\big(S - S^{-1}\big). \tag{7}$$

Delopgave 11. Find egenværdierne for D_h og find en basis for $\mathbf{C}^n$ bestående af egenvektorer for D_h. Observér, at 0 er en egenværdi for D_h. Fortolk en tilhørende egenvektor ud fra, at D_h er en approksimation til differentiation.

Delopgave 12. Find egenværdierne for matricen D_h^2.

Delopgave 13. Sæt nu $n = 4$ og bestem en basis for $\mathbf{R}^4$ bestående af egenvektorer for D_h^2.

Delopgave 14. Vi lader fortsat $n = 4$. Bestem en reel diagonalmatrix X og en reel invertibel matrix P, således at $D_h^2 = PXP^{-1}$.

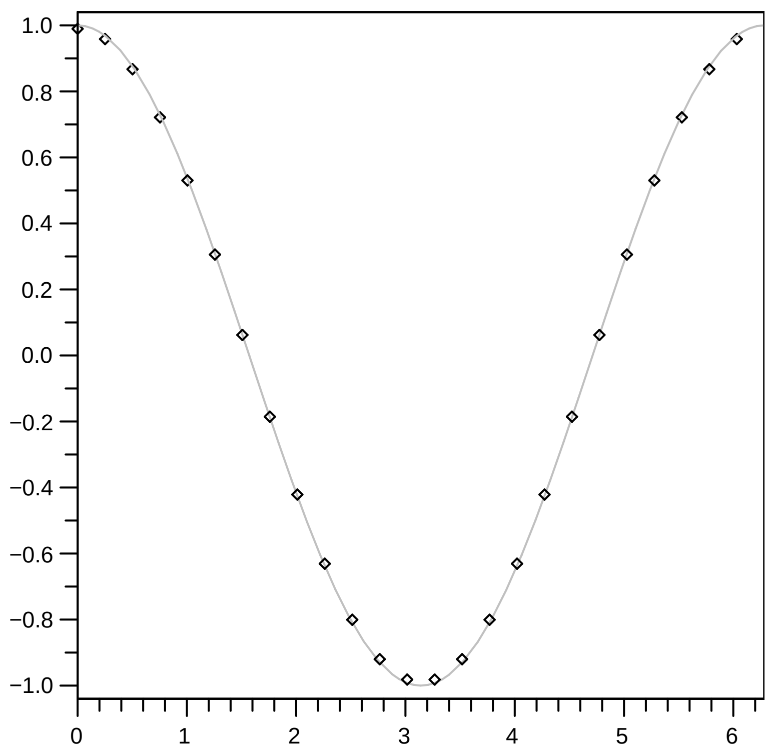
Eksempler. Vi vil nu i nogle eksempler vise, at D_h faktisk er en differentiationsmatrix. Vi tager som det første eksempel funktionen $f(x) = \sin(x)$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Vi vælger at sample i 25 ækvidistante punkter i dette interval. Det betyder, at vi tager $n = 25$ og tager

$$x_j = \sin(2\pi/25(j-1)), \quad j = 1, 2, \ldots, 25.$$

I dette tilfælde er $h = 2\pi/25$. Hvis vi nu tager D_h for $n = 25$ og beregner $D_h\mathbf{x}$, så skal indgangene i denne vektor tilnærmelsesvis svare til værdierne af $f'(x) = \cos(x)$ i samplepunkterne. I Figur 2 har vi afsat punkterne

$$(2\pi/25(j-1), (D_h\mathbf{x})_j), \quad j = 1, 2, \ldots, 25,$$

og samtidig tegnet grafen for $f'(x) = \cos(x)$. Man ser at der er god overensstemmelse mellem den numeriske beregning og det eksakte resultat.



Figur 2: Numerisk differentiation af $\sin(x)$

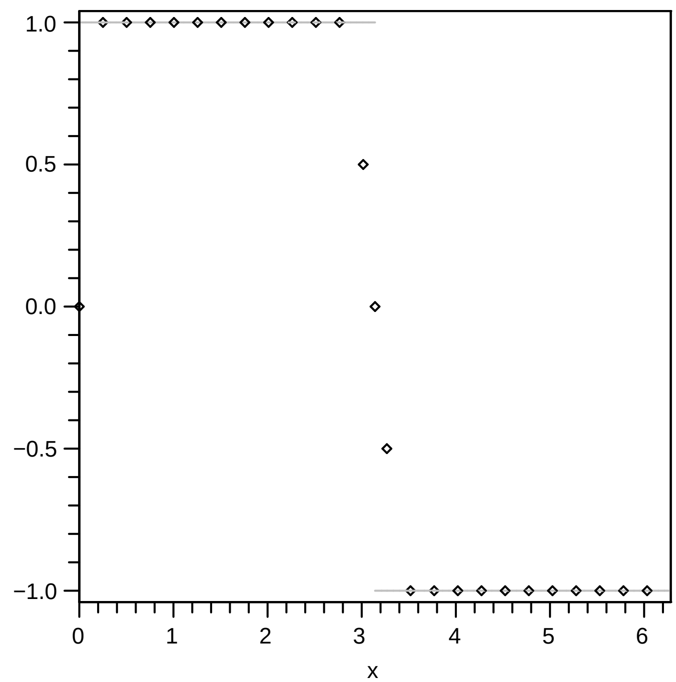
Som det næste eksempel tager vi en funktion, der ikke er differentiabel i et punkt. Vi tager

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < \pi, \\ 2\pi - x, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Vi har da

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x < \pi \\ \text{ikke differentiabel}, & x = \pi \\ -1, & x > \pi \end{cases}$$

Vi gentager nu det numeriske eksperiment ovenfor med den nye funktion og dens afledede. Vi tager igen $n = 25$. Resultatet ses i Figur 3.



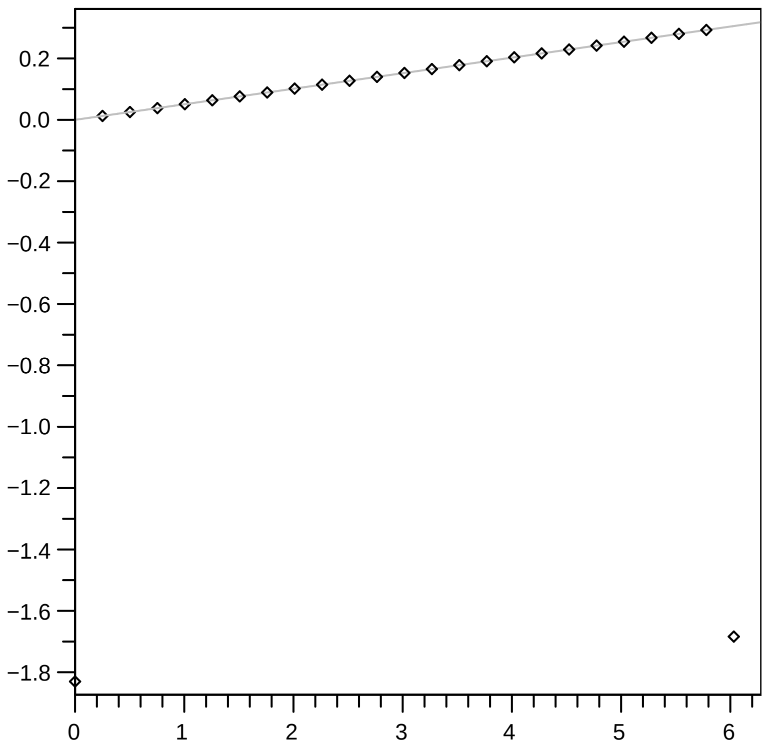
Figur 3: Numerisk differentiation af $g(x)$

I det sidste eksempel skal vi se på, hvad der sker, når den funktion vi arbejder med, ikke er periodisk, eller ikke kan fortsættes periodisk og differentiabel. Vi tager som eksempel funktionen

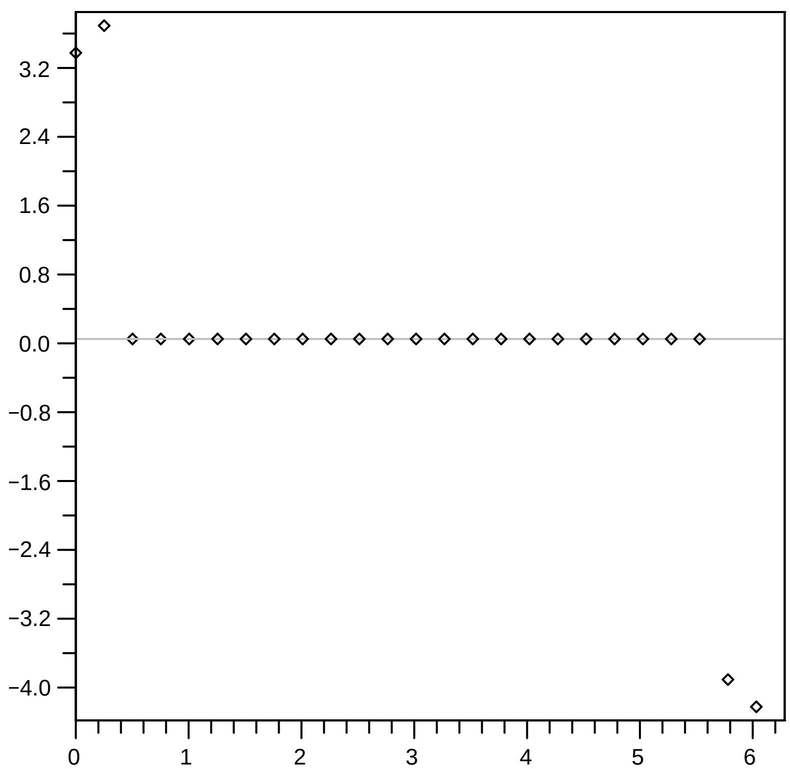
$$F(x) = x^2/(2\pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Den periodiske fortsættelse af funktionen har diskontinuiteter i $2\pi k$ for alle heltal k. Resultatet af det numeriske eksperiment er vist i Figur 4. Man ser at der er en stor fejl i de to endepunkter. Man kan anvende D_h flere gange til at beregne højere afledede. Et eksempel med den anden afledede af $F(x)$ er givet i Figur 5.

Ekstraopgave. På kursets hjemmeside ligger der en Maple fil, der implementerer disse eksperimenter. Man må gerne eksperimentere videre med denne fil og selv lave andre eksempler.



Figur 4: Numerisk differentiation af $F(x)$



Figur 5: Numerisk differentiation af $F(x)$ to gange