Det Ingeniør-, Natur- og Sundhedsvidenskabelige basisår
Matematik 2A, Forår 2007, Hold 4
Opgave A
Kommenteret version

Opgaven består af et antal delopgaver. Disse er af varierende omfang. Der er også en del forklarende tekst ind imellem.

Formålet med denne opgave er at forstå et af de allervigtigste resultater i Lineær Algebra. Det er, at Gauss elimination fører til, at løsning af et lineært ligningssystem (her n ligninger med n ubekendte) kan reduceres til at løse to triangulær ligningssystemer, som umiddelbart kan løses ved substitution (fremad i det ene tilfælde, tilbage i det andet). Dette fører til en reduktion af antallet af regneoperationer, når man skal løse et ligningssystem mange gange, med en fast koefficientmatrix og varierende højresider. Det er noget der ofte sker i anvendelser.

Definitioner. I de følgende opgaver skal vi bruge nogle definitioner. Vi ser kun på kvadratiske $n \times n$ matricer. Vi skriver en generel matrix som $A = [a_{ij}]$. De to indices opfylder $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$. En *øvre trekantsmatrix* er en matrix, der opfylder $a_{ij} = 0$ for alle $i > j$. En *nedre trekantsmatrix* er en matrix, der opfylder $a_{ij} = 0$ for alle $i < j$. Her er et konkret eksempel på en af hver type.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

En trekantsmatrix siges at være *unital*, hvis alle diagonalindgangene er lig 1, d.v.s. $a_{ii} = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. To eksempler:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bemærk, at den transponerede af en øvre trekantsmatrix er en nedre trekantsmatrix, og omvendt.

Delopgave 1. Lad A og B være $n \times n$ øvre trekantsmatricer. Gør rede for, at deres produkt AB er en øvre trekantsmatrix. Tilsvarende for nedre trekantsmatricer. Hvilke matricer er både øvre og nedre trekantsmatricer? Hvilke matricer er både øvre og nedre unitale trekantsmatricer?

Lad $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ være øvre trekanstmatricer. Det formelle argument for, at AB er en øvre trekantsmatrix er følgende: Vi skal vise at alle indgange $(AB)_{ij} = 0$ for $i > j$. Antag i og j fast valgte, med $i > j$. Så er $a_{ik} = 0$ for $k = 1, 2, \ldots, i-1$. Heraf følger

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Men $b_{kj} = 0$ for $k \geq i > j$ per antagelse. Altså er AB en øvre trekantsmatrix.

Delopgave 2. Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ øvre eller nedre trekantsmatrix. Vis, at en sådan trekantsmatrix er invertibel, hvis og kun hvis $a_{ii} \neq 0$ for alle i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se Delopgave 11.

Delopgave 3. Lad A være en unital nedre trekantsmatrix. Vis ved hjælp af rækkeoperationer, at den inverse til A også er en unital nedre trekantsmatrix. Start eventuelt med en konkret matrix med talindgange for at forklare resultatet.

Man kan starte med et konkret eksempel. Invertibilitet følger af Delopgave 2. Både i det konkrete, og i det generelle, tilfælde skal man observere, at for en given række udfører man kun rækkeoperationer på underliggende rækker. Det er derfor kun i disse rækker at man kan ændre nuller i enhedsmatricen til ikke-nul indgange. Resultatet er, at den inverse er en unital nedre trekantsmatrix.

Et mere formelt argument opskriver elementære matricer til at udføre reduktionen, og observerer, at alle de anvendte elementære matricer er unitale nedre trekantsmatricer, hvis inverse igen er unitale nedre trekantsmatricer.

Delopgave 4. Lad A være en kvadratisk øvre trekantsmatrix. Et konsistent ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan løses ved at substituere bagfra, altså uden at finde den reducerede echelonform. Illustrér metoden ved hjælp af følgende matrix A og vektor $\mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Gør rede for, at hvis B er en nedre trekantsmatrix, så kan man finde løsningen til et konsistent ligningssystem $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$ ved fremadgående substitution, uden at skulle finde echelonform eller reduceret echelonform. Illustrér metoden ved eksemplet

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Løsningerne er $\mathbf{x} = (-1/2, -4, -2, 2)$ og $\mathbf{y} = (2, 1, -1, -1)$. Det vigtige her er at forstå, at på en computer er tilbagesubstitution hhv fremadgåendesubstitution meget mere effektivt (kræver færre regneoperationer) end at gennemgøre en fuldstændig Gauss elimination.

Forklaring. I resten af opgaven skal vi se på en vigtig konsekvens af Gauss-eliminationen for et ligningssystem. Vi ser for enkelhedens skyld kun på et ligningssystem med n ligninger og n ubekendte, således at koefficientmatricen er kvadratisk. Vi starter med resultaterne fra Lay vedrørende rækkeoperationer og elementære matricer.

Vi har givet en $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$. Hvis vi vil fremhæve rækkerne, så kan vi skrive den som en søjle af rækkevektorer

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

De tre rækkeoperationer kan da beskrives ved følgende transformationer.

1. Multiplicér række k med konstanten $c \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ c \cdot \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

2. Læg c gange række k til række l, $k \neq l$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l + c \cdot \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

3. Ombyt række k og række l, $k \neq l$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}$$

Den elementære matrix svarende til den første rækkeoperation er givet ved

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j,\ i \neq k, \\ c & \text{for } i = j,\ i = k. \end{cases} \tag{1}$$

Den elementære matrix svarende til den anden rækkeoperation er givet ved

$$(F)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ c & \text{for } i = l,\ j = k, \\ 0 & \text{for alle andre } i \text{ og } j. \end{cases} \tag{2}$$

Den elementære matrix svarende til den tredje rækkeoperation er givet ved

$$(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j,\ i \neq k,\ i \neq l, \\ 1 & \text{for } i = k,\ j = l, \\ 1 & \text{for } i = l,\ j = k, \\ 0 & \text{for alle andre } i \text{ og } j. \end{cases} \tag{3}$$

Delopgave 5. Forklar i detaljer ovenstående og giv nogle konkrete taleksempler. Vis, at enhver elementær matrix er invertibel, og bestem den inverse matrix til hver af de tre typer elementære matricer. Beskriv de inverse matricer både med ord (hvilken rækkeoperation implementerer den inverse) og ved formler som (1), (2), og (3).

Opgaven består i at vise at man har forstået Lay, samt at man kan læse indexnotationen for indgange i en matrix, og forstå den.

Delopgave 6. Der er givet en $n \times n$ matrix A. Gør rede for, processen med rækkeoperationer, der fører til echelonformen for A (vi kalder den B), kan beskrives som multiplikation til venstre med elementære matricer, dvs.

$$B = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Her er hver E_j en af de elementære matricer. Gør rede for, at man altid kan gennemføre processen uden at bruge elementære matricer af typen (1). Brug matricen A fra Delopgave 10, se formel (7), til at illustrere disse ting.

Et muligt svar på faktoriseringen af A, der leder til en næsten fuldstændig reduktion til echelonform, pånær at der ikke er brugt elementære operationer af typen (7), er

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Delopgave 7. Antag, at en matrix A kan reduceres til echelonform alene ved at bruge elementære matricer af typen (2), og at man i hvert trin kun anvender operationerne på rækkerne *under* den aktuelle pivotrække (præcis som beskrevet i starten af Chapter 1 i Lay til opnåelse af echelonform). Vis, at der så findes en unital nedre trekantsmatrix L og en øvre trekantsmatrix U, således at

$$A = LU. \tag{4}$$

Faktoriseringen (4) kaldes LU-faktoriseringen. Antag nu, at vi skal løse ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og at ligningssystemet er konsistent. Antag også, at vi allerede kender LU-faktoriseringen (4). Vis, at så kan ligningssystemet løses ved at løse de to systemer

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{og} \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{5}$$

Disse to systemer kan løses direkte ved substitution, som set i Delopgave 4.

Her drejer det sig om at stykke informationerne fra tidligere delopgaver sammen. Man skal huske at produkt af unitale nedre trekantsmatricer og invers er af samme type og så flytte de elementære operationer over på den anden side.

Kommentar. I mange anvendelser skal man ofte løse et ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for mange forskellige højresider. En direkte løsning ved at bruge rækkeoperationer kræver cirka n^3 beregninger. En LU faktorisering kræver også cirka n^3 beregningen, men den efterfølgende løsning af ligningssystemer med metoden i (5) kræver kun cirka n^2 beregninger.

Delopgave 8. Bestem en LU faktorisering af matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 11 & 4 \\ -3 & -4 & -10 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se Lay Section 2.5 for metoden.

Svaret er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Delopgave 9. Lad P betegne en $n \times n$ matrix, som er fremkommet ved at ombytte (permutere) nogle af rækkerne i $n \times n$ enhedsmatricen I_n. P kaldes en permutationsmatrix. Bemærk, at vi har $PI_n = P$. Det viser, at P er bestemt ved permutationer af rækkerne i I_n. Lad A være en vilkårlig $n \times n$ matrix. Gør rede for, at PA giver en matrix med rækkerne i A ombyttet på sammen måde som i P. Start gerne med taleksempler. Gør rede for, at enhver $n \times n$ matrix kan faktoriseres som

$$A = PLU, \tag{6}$$

hvor P er en permutationsmatrix, L en unital nedre trekantsmatrix, og U en øvre trekantsmatrix. *Hint*: Start med at gennemføre den sædvanlige reduktion til echelonform. Notér undervejs de nødvendige rækkeombytninger. Det tillader én at konstruere en permutationsmatrix Q, således at QA opfylder betingelserne i Delopgave 10.

Svaret står i den detaljerede beskrivelse i opgaveteksten.

Bemærk. Permutationsmatricer kommuterer ikke altid. Giv et eksempel herpå.

Delopgave 10. Lad A være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Bestem en faktorisering af A af typen (6).

Svaret er

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Delopgave 11. Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ øvre eller nedre trekantsmatrix. Vis, at i begge tilfælde gælder, at determinanten af A er lig produktet af diagonalindgangene i A, altså

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Lay Section 3.1, Theorem 2.

Delopgave 12. Antag, at der er givet en LU faktorisering af A, som i (4). Vis, at

$$\det A = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn},$$

hvor u_{ii} betegner diagonalindgangene i U. Vis, at en direkte udregninng af $\det A$ efter definitionen i Lay kræver cirka $n!$ beregninger. Som angivet i kommentaren ovenfor, så kræver beregning af $\det A$ med LU faktoriseringen cirka n^3 beregninger. Sammenlign disse to størrelser for f. eks. $n = 10$ og $n = 20$.

Hvis $A = LU$, så er $\det A = \det L \det U$. Da L er unital, er $\det L = 1$.
