

Opgaver i lineær algebra 1

Matematik 2A Hold 4

Nedenstående opgaver går alle ud på at finde den reducerede echelonform af en matrix, hvori der indgår en, to, eller tre parametre. I hver opgave skal man finde alle de mulige reducerede echelonformer, der kan fremkomme, afhængig af værdierne af parameteren eller parametrene.

Bemærk, at man ikke kan bruge lommeregner eller computerprogrammer blindt til at finde svarene. Der vil typisk være en eller flere parameterværdier, som lommeregneren eller computerprogrammet enten overser, eller behandler forkert.

På den anden side, hvis man tænker på, hvad reduceret echelonform er, så er det meget lette opgaver at regne med håndkraft (og lidt tankevirksomhed).

Opgave 1. Bestem for alle reelle tal a den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2. Bestem for alle reelle tal a og b den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{bmatrix}.$$

Opgave 3. Bestem for alle reelle tal a og b den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opgave 4. Bestem for alle reelle tal a og b den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 5. Bestem for alle reelle tal a , b og c den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

Opgave 6. Bestem for alle reelle tal a , b og c den reducerede echelonform af matricen

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Facitliste Her er kort en liste med løsningerne til de seks opgaver. Jeg angiver også hvilken form Maple giver som svar.

Opgave 1 Tilfældet $a = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $a \neq 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{1-a} \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.

Opgave 2 Tilfældet $a = 1$ og $b = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $a \neq 1$ og $ab = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $ab \neq 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2a-2ab}{1-ab} \\ 0 & 1 & \frac{2-2a}{1-ab} \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.

Opgave 3 Tilfældet $4 - 2a + 2ab = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2+2b \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $4 - 2a + 2ab \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.

Opgave 4 Tilfældet $a = 0$ og $b = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet mindst et af tallene a og b er ikke nul

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.

Opgave 5 Tilfældet $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet mindst et af de tre tal a , b og c er ikke lig nul.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.

Opgave 6 Tilfældet $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $a = 0$, $b = 0$ og $c \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $a = 0$, $b \neq 0$ og c vilkårlig.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilfældet $a \neq 0$ og b og c vilkårlige.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maple giver denne sidste form som svar.