Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig eksamen
8. juni 2006

Dato: 8. juni 2006

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. En række af funktioner er givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Find mængden I hvor rækken (1) konvergerer punktvis.
2. For alle $x \in I$ fra spørgsmål 1., beregn dens sum.
3. Vis, at rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx},$$
konvergerer uniformt på intervalet $(-\infty, -\delta]$, for alle $\delta > 0$ og udregn dens sum.

Opgave 2. En kompleks funktion er givet ved udtrykket

$$h(z) = \frac{1}{(z^2 + az + 2)^2}, \quad a \in \mathbf{C}.$$

1. Bestem a således at h har en pol af orden 2 i $z_0 = 1 - i$.
2. Ved a som i 1., beregn integralet
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx,$$
ved at bruge residueregning.

Opgave 3. Vi definerer funktionen

$$f(z) = \frac{(z^4 + 4)^3}{z^4 - 1}.$$

1. Gør rede for, at h er en meromorf funktion på $\mathbf{C}$.
2. Bestem polerne for f og deres orden.
3. Bestem nulpunkterne for f og deres orden.
4. Lad γ betegne cirklen, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning, givet ved $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$. Beregn integralet
$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$
5. Hvad er konvergensradius for potensrækkeudviklingen af f omkring $z_0 = 0$?

Opgave 4. Der er givet en ligning

$$(x^2 + y^2)\cos(z) - (x - y)(z + 1) = 0 \tag{2}$$

i de tre reelle variable (x, y, z). Der er også givet et punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

1. Vis, at (x_0, y_0, z_0) opfylder ligningen givet i (2).
2. Vis, at der findes en kontinuert differentiabel funktion $g(x, y)$ defineret i en åben mængde U, med $(x_0, y_0) \in U$, således at $g(x_0, y_0) = z_0$ og

   $$(x^2 + y^2)\cos(g(x, y)) - (x - y)(g(x, y) + 1) = 0,$$

   for alle $(x, y) \in U$.
3. Bestem

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

4. Bestem ligningen for tangentplanen hørende til $z = g(x, y)$ i punktet (x_0, y_0, z_0).