Matematik 2
Reelle og komplekse funktioner

Prøveeksamen
1. juni 2006

Dato: 1. juni 2006

Tidspunkt: Kl. 08:30–12:30

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på de 2 næste sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n},$$

   og beregn dens sum.

2. Beregn summen af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n},$$

   ved at bruge resultatet fra spørgsmål 1.

3. Afgør, om den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + \cos(n)}{n^3 + 1}$$

   er konvergent eller divergent.

4. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{3^{2n}}$$

   er absolut konvergent.

Opgave 2. En kompleks funktion g er givet ved udtrykket

$$g(z) = \frac{\sin^2(z)}{(z-1)(z^2+1)^2}.$$

1. Vis, at g er meromorf på $\mathbf{C}$.

2. Bestem polerne for g og deres orden.

3. Bestem nulpunkterne for g og deres orden.

4. Lad $R = [-9, 9] \times [-2, 2]$, og lad ∂R betegne vejen givet ved de fire linjestykker som omslutter R, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn kurveintegralet

$$\int_{\partial R} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz.$$

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2}\, dx = \frac{3\pi}{16} e^{-2},$$

ved at bruge residueregning.

Opgave 4. En afbilding $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er givet ved udtrykket

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

1. Gør rede for, at f er differentiabel på $\mathbf{R}^2$.

2. Find Jacobi-matricen for f i alle punkter $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

3. Gør rede for, at til ethvert $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ findes en åben mængde U, med $(x_0, y_0) \in U$, således at f er injektiv på U. Gør rede for, at den inverse funktion $f^{-1} : f(U) \to U$ er differentiabel, og find dens Jacobi-matrix $Df^{-1}(f(x, y))$, for alle $(x, y) \in U$.

4. Funktionen f^{-1} kan opfattes som en kompleks funktion fra U til $\mathbf{C}$. Vis, at f^{-1} er holomorf på $f(U)$, ved at bruge Cauchy-Riemann ligningerne.