Mat2-SUMA4
Reelle og komplekse funktioner

Skriftlig re-eksamen
23. august 2007

Dato: 23. august 2007

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet findes på den næste side.

Opgave 1. En række af funktioner er givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n, \quad -1 < x < 1. \tag{1}$$

1. Vis, at rækken (1) konvergerer punktvist.
2. Vis, at rækken konvergerer uniformt på $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
3. Er rækken konvergent når $x = -1$? Hvad med $x = 1$?

Opgave 2. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{z}{e^{z^3} - 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

1. Gør rede for, at h er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$.
2. Er $z = 0$ en hævelig singularitet for h?
3. Bestem polerne for h og deres orden.

Opgave 3. Lad $\partial B_1(0)$ være den positivt orienterede enhedscirkel med centrum i 0 og radius 1. Beregn integralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{z}{e^{z^3} - 1} \, dz,$$

ved at bruge residueregning.

Opgave 4. Definer $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin(x)}{x^4 + y^2}, \frac{\sin(y)}{x^2 + y^4} \right).$$

1. Gør rede for, at f er differentiabel på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Beregn Jacobi matricen for f i alle punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Er f kontinuert i $(0,0)$?