Matematik 2 Analyse Forår 2009
Opgaver til Kursusgang 16

Nedenfor er nogle repetitionsopgaver, som ikke skal regnes i undervisningstiden. Den sidste opgave relaterer også til fordybelsesprojektet.

Opgave 1. Lad $\gamma_n(t) = e^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$ et helt tal. Beregn

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z} dz \quad \text{og} \quad \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^2} dz$$

for alle n.

Opgave 2. Udregn kurveintegralet

$$\int_{\partial B(0,1)} \overline{z}\, dz$$

hvor cirklen gennemløbes i positiv omløbsretning. Sammenlign med AJ Corollary 4.5.

Opgave 3. Givet en kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{C}$ og en kontinuert funktion $\gamma^* \to \mathbf{C}$. Vis, at

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f,$$

hvor $-\gamma$ er kurven givet ved $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. Bemærk, at $(-\gamma)^* = \gamma^*$, men at omløbsretningerne er modsatte.

Opgave 4. Denne opgave relaterer til fordybelsesprojektet. Som I har set, så kan en definition af en funktion indføres på mange forskellige måder.

Vi kan for eksempel vælge at definere $\cos(z)$ og $\sin(z)$ for alle $z \in \mathbf{C}$ ved potensrækkerne

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

og

$$\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}.$$

Overvej, at disse definitioner giver de kendte trigonometrisk funktioner, nu udvidet til komplekse tal.

Hvorfor gælder der, at

$$\int_{\gamma} \cos(z) dz = 0 \quad \text{og} \quad \int_{\gamma} \sin(z) dz = 0$$

for *alle* lukkede veje i $\mathbf{C}$. Giv mindst *tre* forskellige begrundelser for disse resultater, baseret på resultater i afsnittene 1–5 i AJ.