

Kursusgang 12, 10. november 2010, 12:30–16.15**Dagens program**

- 12:30–14:00 i G5-112. Forelæsning: Følgekompakthed i metriske rum, afsnit 12.5. Bolzano-Weierstrass sætning, fra afsnit 11.2, siderne 299–300. Sammenhængende mængde i metrisk rum. Kurvesammenhængende mængde i \mathbf{R}^n . De sidste emner gennemgås efter supplerende noter.
- 14:00–16:00 i grupperum. Opgaverregning, se listen nedenfor
- 16:00–16:15 i G5-112. Svar på spørgsmål. Status af arbejdet i grupperne.

Opgaver

- I denne opgave ser vi på $X = \mathbf{R}^2$ med tre forskellige metrikker. Vi bruger notationen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ for $\mathbf{x} \in X$ og definerer for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad (1)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}, \quad (2)$$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \quad (3)$$

Vi ved allerede, at $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ er en metrik.

- Vis, at $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ og $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ begge er metrikker.
- Tegn kuglen med centrum $\mathbf{0} = (0, 0)$ og radius $r = 1$ for alle tre metrikker.
- Vis ulighederne

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4)$$

for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

- Vis ulighederne

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{2}d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5)$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{2}d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (6)$$

- Brug de viste uligheder til at vise, at hvis en følge $\{x_k\}$ er konvergent i en af de tre metrikker, så er den også konvergent med samme grænse i de to andre metrikker.
- Section 12.1, Exercise 5.
 - Section 12.4, Exercises 1 and 2.
 - Section 12.4, Exercise 7.
 - Section 12.4, Exercise 8.

Arne Jensen