Bevis for Theorem 1.9

Beviset for Theorem 2.20 i [PF] bruger Theorem 1.9. Jeg giver et bevis her. Det er en variant af beviset i [PF].

Der er givet $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Vi skal vise eksistens af et rationalt tal q, så at $a < q < b$. Da $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, findes der et $N \geq 1$, så at

$$\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2} \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Vi vælger fast $n_0 \geq N$. Vi har da

$$\frac{1}{n_0} < \frac{b-a}{2},$$

hvilket vi skriver som $2 < n_0 b - n_0 a$. Heraf følger, at der findes mindst ét helt tal m (kan både være positivt og negativt), således at $n_0 a < m < n_0 b$. Bemærk, at $n_0 > 0$. Division giver da

$$a < \frac{m}{n_0} < b.$$

Heraf følger resultatet.

Arne Jensen