Kommentarer til sections 2.4 og 2.5

Den centrale sætning i disse afsnit er Proposition 2.37. Jeg giver her et direkte bevis for denne sætning, baseret på definitionerne og Theorem 2.29. Hovedresultatet er

En lukket og begrænset delmængde af de reelle tal er følgekompakt.

Her er beviset. Der er givet en mængde $S \subset \mathbf{R}$, som er lukket og begrænset. For enhver følge $\{x_n\} \subseteq S$ skal vi vise, at den har en konvergent delfølge, og at grænseværdien for denne følge ligger i S.

Lad $\{x_n\} \subseteq S$ være en vilkårlig følge. Da S er begrænset, kan vi finde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, således at $S \subseteq [a, b]$. Derfor er også $\{x_n\} \subseteq [a, b]$. Sæt $I_0 = [a, b]$, og lad $m = \frac{1}{2}(a + b)$ være midtpunktet. Vi har dermed delt I_0 i de to intervaller $[a, m]$ og $[m, b]$. Da følgen $\{x_n\}$ er uendelig, må mindst et af disse intervaller indeholde uendeligt mange x_n. Vi vælger et af intervallerne med uendeligt mange x_n. Det betegnes med $I_1 = [a_1, b_1]$. Sæt nu $m_1 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$. Mindst et af intervallerne $[a_1, m_1]$ og $[m_1, b_1]$ indeholder uendeligt mange x_n. Vælg et sådant, som vi betegner med $I_2 = [a_2, b_2]$. Denne proces fortsættes, og vi får på den måde defineret intervaller I_n, $n \in \mathbf{N}$, således at $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, og $b_n - a_n = (b - a)2^{-n}$. Hermed er alle betingelserne for at anvende Theorem 2.29 opfyldt. Vi konkluderer, at der findes præcis et x_*, så at $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_*\}$.

Vi bestemmer nu en delfølge af $\{x_n\}$, som konvergerer mod x_*. Vores delintervaller I_n indeholder alle uendeligt mange x_n. Vi starter fra I_1. Vælg det mindste n, så $x_n \in I_1$. Det betegnes med n_1. Vælg derefter det mindste n, så at $n_1 < n$ og $x_n \in I_2$. Da I_2 indeholder uendeligt mange x_n, er dette altid muligt. Dette n betegnes med n_2. Fortsæt denne proces. På den måde definerer vi en delfølge $\{x_{n_k}\}$, således at $x_{n_k} \in I_k$. Vi skal vise, at $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Bestem N, således at $b_N - a_N = (b - a)2^{-N} < \varepsilon$. Vi har ifølge konstruktionen, at $x_{n_k} \in I_k \subseteq I_N$ for alle $k \geq N$. Da også $x_* \in I_N$, følger, at $|x_{n_k} - x_*| \leq b_N - a_N < \varepsilon$ for alle $k \geq N$, og vi har vist, at $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$. Da S er lukket, har vi også, at $x_* \in S$.

Vi har dermed vist, at en vilkårlig følge i S har en konvergent delfølge, og at dens grænseværdi ligger i S. Dermed er vist, at S er følgekompakt.

Arne Jensen