

Kædereglen for funktioner af én variabel

Vi giver et bevis for kædereglen, som er nyttigt senere, når vi skal se på komplekse funktioner af en kompleks variabel, og funktioner af flere variable.

Lemma. *Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et åbent interval, og lad $x_0 \in I$. Lad $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ være en funktion. Så gælder, at f er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $f'(x_0)$, hvis og kun hvis der findes en funktion $E_{x_0}: I \rightarrow \mathbf{R}$, således at $\lim_{x \rightarrow x_0} E_{x_0}(x) = 0$, og således at*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E_{x_0}(x)(x - x_0) \quad \text{for alle } x \in I. \quad (1)$$

Bevis. Antag først, at f er differentiabel i x_0 . Definér

$$E_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{for } x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{for } x = x_0. \end{cases}$$

Definitionen af differentiability medfører, at $\lim_{x \rightarrow x_0} E_{x_0}(x) = 0$, og (1) følger af en omskrivning af definitionen af $E_{x_0}(x)$.

Antag nu, at E_{x_0} eksisterer, således at (1) er opfyldt. Så har vi for $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + E_{x_0}(x),$$

og heraf følger

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

hvilket viser differentiability i x_0 af f . □

Kædereglen kan formuleres på følgende måde.

Sætning. *Lad I og J være åbne intervaller. Antag, at $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ er differentiabel i $x_0 \in I$. Sæt $y_0 = f(x_0)$. Antag, at $f(I) \subseteq J$, og at $g: J \rightarrow \mathbf{R}$ er differentiabel i y_0 . Så er $h = g \circ f$ differentiabel i x_0 og*

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Bevis. Vi bruger Lemmaet ovenfor to gange. Det giver følgende resultat.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (x - x_0)(f'(x_0) + E_{x_0}(x)), \\ g(y) - g(y_0) &= (y - y_0)(g'(y_0) + \tilde{E}_{y_0}(y)). \end{aligned} \quad (2)$$

Her gælder $\lim_{x \rightarrow x_0} E_{x_0}(x) = 0$ og $\lim_{y \rightarrow y_0} \tilde{E}_{y_0}(y) = 0$. Vi sætter $y = f(x)$ og regner videre på (2).

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0))(g'(y_0) + \tilde{E}_{y_0}(f(x))) \\ &= (x - x_0)(f'(x_0) + E_{x_0}(x))(g'(y_0) + \tilde{E}_{y_0}(f(x))). \end{aligned}$$

Dette udtryk skriver vi som

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = (f'(x_0) + E_{x_0}(x))(g'(y_0) + \tilde{E}_{y_0}(f(x)))$$

Da f differentiabel i x_0 medfører, at f er kontinuert i x_0 , har vi, at $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{E}_{y_0}(f(x)) = 0$. Heraf følger

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g'(y_0).$$

□

Arne Jensen