To vigtige uligheder

I [PF] Chapter 10 og videre frem er der en række resultater, der forbinder konvergens, kontinuitet, osv. med samme egenskaber ved komponenter, for eksempel Theorem 10.9 og Theorem 11.9. Alle beviserne kan reduceres til to uligheder, som ikke er formuleret i [PF]. Jeg formulerer dem her og bruger dem i beviserne.

Lad $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Vi sætter

$$\|u\| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Vi har da følgende to uligheder.

$$\max\{|u_j| \,|\, j = 1, 2, \dots, n\} \leq \|\mathbf{u}\| \tag{2}$$

$$\|\mathbf{u}\| \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j| \tag{3}$$

Uligheden (2) følger umiddelbart fra (1), idet

$$|u_k|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2$$

for $k = 1, 2, \dots, n$.

I beviset for (3) kan vi antage, at $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Så er $\dfrac{|u_j|}{\|\mathbf{u}\|} \leq 1$ for alle $j = 1, 2, \dots, n$. Men for $0 \leq \alpha \leq 1$ gælder $\alpha^2 \leq \alpha$. Derfor har vi

$$\frac{|u_j|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq \frac{|u_j|}{\|\mathbf{u}\|}$$

for alle $j = 1, 2, \dots, n$. Heraf og af (1) følger, at

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{|u_j|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|u_j|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Det beviser (3).

Arne Jensen