Sammenhængende mængder Resultaterne i [PF] vedrørende sammenhængende mængder er ikke dem, der er brug for i forbindelse med forårets undervisning i Analyse 2. Derfor kommer der en anden version nedenfor.

Vi ser først på mængden bestående af to punkter $\{0,1\}$. Denne mængde er et metrisk rum. Man kan enten betragte den som et metrisk underrum af $\mathbf{R}$ med den sædvanlige metrik, eller som et metrisk rum med den diskrete metrik. Der er fire åbne delmængder af dette metriske rum. Det er $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ og $\{0,1\}$. De samme fire mængder er også lukkede. Overvej disse resultater!

I det følgende betegner (X,d) et metrisk rum. Metrikken er fastholdt, så vi skriver normalt kun X for det metriske rum.

Definition 1. Et metrisk rum X siges at være *usammenhængende*, hvis der findes to åbne, disjunkte og ikke-tomme delmængder U og V af X, således at $X = U \cup V$. Et metrisk rum siges at være *sammenhængende*, hvis det ikke er usammenhængende. En delmængde Y af et metrisk rum X siges at være sammenhængende, hvis den er sammenhængende som metrisk underrum af X.

Vi starter med følgende resultat.

Sætning 2. *Et metrisk rum X er sammenhængende, hvis og kun hvis enhver kontinuert funktion $f\colon X \to \{0,1\}$ er konstant.*

Bevis. Antag først, at X er sammenhængende. Lad $f\colon X \to \{0,1\}$ være en vilkårlig kontinuert funktion. Definer $U = f^{-1}(\{0\})$ og $V = f^{-1}(\{1\})$. Da f er kontinuert, følger af [PF,Theorem 12.35], at både U og V er åbne delmængder af X. Det er klart, at vi har $U \cap V = \emptyset$ og $X = U \cup V$. Da X er sammenhængende, må vi enten have $U = \emptyset$ eller $V = \emptyset$. I begge tilfælde er f så konstant.

Antag omvendt, at enhver kontinuert funktion $f\colon X \to \{0,1\}$ er konstant. Antag, at $X = U \cup V$, med $U \cap V = \emptyset$ og U og V begge åbne. Definer

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ 1, & x \in V. \end{cases}$$

Så medfører [PF,Theorem 12.35], at $f\colon X \to \{0,1\}$ er kontinuert. Men så er f konstant, og derfor er enten $U = \emptyset$ eller $V = \emptyset$. Dermed er X sammenhængende. $\square$

Sætning 3. *Lad X og Y være metriske rum. Antag, at X er sammenhængende. Lad $g\colon X \to Y$ være en kontinuert funktion. Så er $g(X)$ en sammenhængende delmængde af Y.*

Bevis. Vi bruger Sætning 2. Lad $f\colon g(X) \to \{0,1\}$ være en kontinuert funktion. Så er $h = f \circ g$ en kontinuert funktion fra X til $\{0,1\}$. Da X er sammenhængende, er h konstant, og dermed er g også konstant. Heraf følger resultatet. $\square$

Vi minder om, at følgende delmængder af de reelle tal $\mathbf{R}$ kaldes intervaller:

$$\begin{gathered} \mathbf{R} = (-\infty,\infty),\ \{a\} = [a], \\ (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (a,\infty),\ [a,\infty), \\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ [a,b]. \end{gathered}$$

Her er $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Sætning 4. *En delmængde af de reelle tal $\mathbf{R}$ er sammenhængende, hvis og kun hvis den er et interval.*

Vi beviser ikke dette resultat, da beviset er ret langt og teknisk.

Definition 5. Lad $I \subseteq \mathbf{R}$ være et interval. En kontinuert funktion $f\colon I \to X$ kaldes en *kurve* i X.

Det følger af Sætningerne 3 og 4, at $f(I)$ er en sammenhængende delmængde af X.

Et mere intuitive sammenhængsbegreb er kurvesammenhængende. Det betyder uformelt, at to vilkårlige punkter i X kan forbindes med en kurve i X. Den formelle definition er følgende.

Definition 6. Et metrisk rum X siges at være *kurvesammenhængende*, hvis der for alle $x, y \in X$ gælder, at der findes en kurve $\gamma\colon [0,1] \to X$, således at $\gamma(0) = x$ og $\gamma(1) = y$.

Vi har følgende resultat.

Sætning 7. *Lad X være et metrisk rum. Antag, at X er kurvesammenhængende. Så er X sammenhængende.*

Bevis. Vi kan antage, at X er ikke-tom. Lad $f\colon X \to \{0,1\}$ være en vilkårlig kontinuert funktion. Tag et $x \in X$. Lad $y \in X$ være et vilkårligt punkt. Da X er kurvesammenhængende, findes $\gamma\colon [0,1] \to X$, således at $\gamma(0) = x$ og $\gamma(1) = y$. Sæt $g = f \circ \gamma$. Så er $g\colon [0,1] \to \{0,1\}$ også en kontinuert funktion. Vi har $g(0) = f(x)$. Men da $[0,1]$ er sammenhængende, er g konstant, og derfor er $g(1) = f(y) = f(x)$. Da $y \in X$ er vilkårligt, er f konstant. Af Sætning 2 følger, at X er sammenhængende. $\square$

Bemærk, at vi i beviset overfor også kunne anvende [PF,Theorem 3.11] til at slutte, at g konstant.

Det omvendte resultat gælder ikke. Der findes sammenhængende delmængder af for eksempel $\mathbf{R}^2$, som ikke er kurvesammenhængende. Et eksempel er følgende mængde.

$$X = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_1 \leq 1,\ x_2 = \sin(1/x_1)\} \cup \{(x_1, x_2) \,|\, -1 \leq x_1 \leq 0,\ x_2 = 0\}.$$

Der er dog et vigtigt tilfælde, hvor man kan bevise, at en sammenhængende mængde er kurvesammenhængende. Dette resultat bruges i undervisningen i Analyse 2 i foråret.

Sætning 8. *En åben og sammenhængende delmængde af $\mathbf{R}^n$ er kurvesammenhængende.*

Bevis. Lad $X \subseteq \mathbf{R}^n$ være en åben og samenhængende. Antag $X \neq \emptyset$ og vælg et fast punkt $\mathbf{x}_0 \in X$. Vi vil bevise, at ethvert andet punkt $\mathbf{y} \in X$ kan forbindes med $\mathbf{x}_0$ med en kurve, der forløber inde i X. Vi definerer

$$U = \{\mathbf{y} \in X \,|\, \text{der findes en kurve } \gamma\colon [0,1] \to X, \text{ således at } \gamma(0) = \mathbf{x}_0 \text{ og } \gamma(1) = \mathbf{y}\}.$$

Vi definerer også

$$V = X \setminus U.$$

Vi har da fra definitionerne, at $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ og $U \neq \emptyset$. Vi vil vise, at både U og V er åbne mængder. Lad $\mathbf{u} \in U$ være vilkårlig. Da X er antaget at være åben, findes der $r > 0$, således at $B_r(\mathbf{u}) \subseteq X$. Lad nu γ være en kurve i X, der forbinder $\mathbf{x}_0$ med $\mathbf{u}$. Lad $\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{u})$. Så kan $\mathbf{u}$ og $\mathbf{y}$ forbindes med et liniestykke i $B_r(\mathbf{u})$. Ved at sætte liniestykket sammen med kurven γ fås, at $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x}_0$ kan forbindes med en kurve i X. Dermed har vi vist, at $B_r(\mathbf{u}) \subseteq U$, og U er derfor åben.

For at vise, at V også er åben, antager vi, at $\mathbf{v} \in V$. Da X er åben, findes et $s > 0$, så at $B_s(\mathbf{v}) \subseteq X$. Hvis der findes et punkt $\mathbf{y} \in B_s(\mathbf{v})$, så at $\mathbf{y} \in U$, så kan vi forbinde $\mathbf{x}_0$ med $\mathbf{y}$ og derefter $\mathbf{y}$ med $\mathbf{v}$ med et liniestykke i $B_s(\mathbf{v})$. Men det er i modstrid med definitionen af V. Altså er $B_s(\mathbf{v}) \subseteq V$ og V er åben. Da $U \neq \emptyset$ og X er sammenhængende, konkluderer vi, at $U = X$, og at X er kurvesammenhængende. $\square$