

Første studieår
Matematik-Økonomi studerende
Introduktion til matematiske metoder i økonomi
Skriftlig eksamen
januar 2011

Dato: 11. januar 2011

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 9n - 3. \quad (1)$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.
- (b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).
- (c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).
- (d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 2, \quad x(1) = -2.$$

- (e) Vis, at $x_p(n) = 3(-1)^n + 1$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 3(-1)^n + 9. \quad (2)$$

- (f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 3(-1)^n + 9n + 6. \quad (3)$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

- (a) Løs følgende problem for en første ordens differensligningen

$$x(n+1) = \frac{n-3}{n+3}x(n), \quad x(0) = 2.$$

- (b) Der er givet en homogen tredje ordens differensligning

$$x(n+3) - 3x(n+2) - 4x(n+1) + 12x(n) = 0.$$

Vis, at de tre følger

$$x_1(n) = 2^n, \quad x_2(n) = (-2)^n, \quad x_3(n) = 3^n$$

er løsninger til denne tredje ordens differensligning. Gør rede for, at de tre følger $x_1(n)$, $x_2(n)$ og $x_3(n)$ er lineært uafhængige.

- (c) Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene tredje ordens differensligning

$$x(n+3) - 3x(n+2) - 4x(n+1) + 12x(n) = 2^n.$$

Opgave 3. (a) Betragt følgende problem

$$\begin{aligned} &\underset{x_1, x_2}{\text{Maksimér}} \quad 2x_1 + 7x_2 \\ &\text{u.b.b.:} \\ &4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ &3x_1 + 7x_2 \leq 21, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

og løs det ved en geometrisk betragtning (altså, løs det grafisk).

- (b) Opskriv det duale problem og løs også det grafisk.
- (c) Antag, at de to højresider til bibetingelserne i det primale problem ændres til hhv. 20.1 og 20.8 (i nævnte rækkefølge). Hvad bliver den tilsvarende ændring i objekt-funktionen?
- (d) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned} &\underset{x_1, x_2}{\text{Maksimér}} \quad (x_1 - 1) + 2(x_2 - 2) \\ &\text{u.b.b.:} \\ &2x_1 + x_2 \leq 3, \\ &-1 - x_2 \leq 2(x_1 - x_2), \\ &(2x_1 - 1)^2 \leq 1, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (e) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. (a) Hvad forstås ved en vares marginalnytte?

- (b) Hvad er sammenhængen mellem to varers marginalnytter og det marginale substitutionsforhold (MRS) for de to varer?
- (c) Betragt nyttefunktionen $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, hvor $x_1 > 0, x_2 > 0, \alpha > 0$ og $\beta > 0$. Bestem MRS mellem x_1 og x_2 .
- (d) Betragt transformationen $V(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{\beta} \ln x_1 + \ln x_2$. Hvordan kommer man fra $U(x_1, x_2)$ til $V(x_1, x_2)$? Bestem igen MRS mellem x_1 og x_2 . [Vink: husk følgende generelle potensregel: $(x^a)^b = x^{ab}$, og brug den når b er på formen $\frac{1}{c}$]
- (e) Hvorfor påvirker en positiv monoton transformation som ovenstående ikke det marginale substitutionsforhold? Er dette et generelt resultat?

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \quad (4)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (5)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (6)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta). \quad (7)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (8)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \quad (9)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \quad (10)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \quad (11)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \quad (12)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta). \quad (13)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta). \quad (14)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \quad (15)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \quad (16)$$