Første studieår

Matematik-studerende
Introduktion til matematiske metoder

Skriftlig eksamen
januar 2011

Dato: 11. januar 2011
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 9n - 3. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 2, \quad x(1) = -2.$$

(e) Vis, at $x_{\mathrm{p}}(n) = 3(-1)^n + 1$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 3(-1)^n + 9. \tag{2}$$

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) + 4x(n+1) + 4x(n) = 3(-1)^n + 9n + 6. \tag{3}$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Løs følgende problem for en første ordens differensligningen

$$x(n+1) = \frac{n-3}{n+3}x(n), \quad x(0) = 2.$$

(b) Der er givet en homogen tredje ordens differensligning

$$x(n+3) - 3x(n+2) - 4x(n+1) + 12x(n) = 0.$$

Vis, at de tre følger

$$x_1(n) = 2^n, \quad x_2(n) = (-2)^n, \quad x(n) = 3^n$$

er løsninger til denne tredje ordens differensligning. Gør rede for, at de tre følger $x_1(n)$, $x_2(n)$ og $x_3(n)$ er lineært uafhængige.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene tredje ordens differensligning

$$x(n+3) - 3x(n+2) - 4x(n+1) + 12x(n) = 2^n.$$

Opgave 3. (a) Betragt følgende problem

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ 2x_1 + 7x_2\\
&\text{u.b.b.:}\\
&\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20,\\
&\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21,\\
&\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

og løs det ved en geometrisk betragtning (altså, løs det grafisk).

(b) Opskriv det duale problem og løs også det grafisk.

(c) Antag, at de to højresider til bibetingelserne i det primale problem ændres til hhv. 20.1 og 20.8 (i nævnte rækkefølge). Hvad bliver den tilsvarende ændring i objekt-funktionen?

(d) Forklar, hvordan følgende problem, som <u>ikke</u> er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ (x_1 - 1) + 2(x_2 - 2)\\
&\text{u.b.b.:}\\
&\ 2x_1 + x_2 \leq 3,\\
&\ -1 - x_2 \leq 2(x_1 - x_2),\\
&\ (2x_1 - 1)^2 \leq 1,\\
&\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(e) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= 6x_1(n) - 8x_2(n),\\
x_2(n+1) &= 4x_1(n) - 6x_2(n).
\end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.

(b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n \geq 1$.

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 2$ og $x_2(0) = -2$.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= 6x_1(n) - 8x_2(n) - 1,\\
x_2(n+1) &= 4x_1(n) - 6x_2(n) - 2.
\end{aligned}$$

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \tag{4}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta). \tag{7}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \tag{9}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \tag{11}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \tag{12}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta). \tag{13}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta). \tag{14}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \tag{15}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \tag{16}$$