SØREN L. BUHL

KOMPLEKSE TAL M. M.

Matematik 1

Den teknisk–naturvidenskabelige
Basisuddannelse

Afdeling for Matematik og Datalogi
Institut for Elektroniske Systemer
Aalborg Universitetscenter

MCMXCII

Indhold

Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes
ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at
Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler.

Caspar Wessel (1745–1818) i
Om Directionens analytiske Betegning... 1799

Han tegner Landkort og læser Loven.
Han er saa flittig som jeg er Doven.

Johan Herman Wessel om sin broder.[1]

0 Indledning

Dette notat er beregnet til brug ved kurset "Matematik 1" under AUC's teknisk-naturvidenskabelige basisuddannelse. Det har som sit hovedemne indførelsen af de komplekse tal. Der introduceres først polære koordinater i planen, for at den polære form af komplekse tal lettere kan behandles. Den komplekse eksponentialfunktion benyttes til løsning af homogene og inhomogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Hvert afsnit afsluttes med en opgavesamling. Notatet afsluttes med en facitliste.

Her skal anføres nogle resultater fra trigonometrien, som vi får brug for senere. Først en lille tabel:

u grader	0 0^o	$\frac{1}{6}\pi$ 30^o	$\frac{1}{4}\pi$ 45^o	$\frac{1}{3}\pi$ 60^o	$\frac{1}{2}\pi$ 90^o
$\sin u$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos u$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan u$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

(1)

Der findes mange formler for vinkelskift, men frem for at bruge formelsamling anser jeg det for bedre at udlede disse formler, når man får brug for dem, ved at se på en enhedscirkel. Vi minder om den fra gymnasiet kendte *cosinusrelation*,

[1]Disse citater har jeg hentet fra Kirsti Møller Pedersen: *Caspar Wessel og de komplekse tals repræsentation.* Nordisk Matematisk Tidsskrift, 1979, hefte 2. Caspar Wessel var den første, der opfattede komplekse tal som punkter i planen.

der for en trekant med en vinkel C afgrænset af siderne a og b og med c som modstående side udsiger, at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \tag{2}$$

Endvidere får vi brug for de såkaldte *additionsformler* for cosinus og sinus. De lyder:

$$\begin{aligned}
\cos(u-v) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\
\cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\
\sin(u-v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \\
\sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v
\end{aligned} \tag{3}$$

For at bevise dem starter vi med at indføre følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (\cos u, \sin u), \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2) = (\cos v, \sin v).$$

For deres skalarprodukt har vi to udtryk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

hvoraf den første formel i (3) fås, da der er tale om enhedsvektorer med $\theta = u - v$. Ved at erstatte v med $-v$ får vi den næste formel. I denne erstattes u med $\frac{1}{2}\pi - u$, og vi får den tredje formel. Og heri erstatter vi v med $-v$ for at få den sidste formel.

OPGAVER

0.1. Vis rigtigheden af tallene i (1), fx ved at se på retvinklede trekanter.

0.2. Udled formlerne

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

0.3. Udled formlerne

$$\cos x = \pm\sqrt{1 + \frac{\cos 2x}{2}}, \qquad \sin x = \pm\sqrt{1 - \frac{\cos 2x}{2}},$$

hvor fortegnet afhænger af den kvadrant, som x ligger i.

0.4. Vis, at

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

0.5. Der er andre trigonometriske additionsformler end de i teksten viste. Udled følgende nyttige formler ud fra (3):

$$
\begin{aligned}
\cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},\\
\cos u - \cos v &= -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2},\\
\sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},\\
\sin u - \sin v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2},
\end{aligned}
$$

0.6. Benyt den foregående opgave til at finde ud af, hvad der sker, når man superponerer to vekselstrømme med samme amplitude og med *næsten* samme frekvens. (Stående bølger.)

1 Polære koordinater

I planen indføres et koordinatsystem $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, hvor O er origo og $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ på hinanden ortogonale enhedsvektorer, hvor den korteste drejning fra $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{e}_2$ er i positiv omløbsretning (mod uret). For et punkt P har vi de sædvanlige, såkaldt *cartesiske*[2] koordinater (x,y), hvor abscissen x og ordinaten y er definerede ud fra stedvektoren ved $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Endvidere er punktet P bestemt ud fra stedvektorens længde $r = |\overrightarrow{OP}|$ og vinklen θ, der angiver drejningen fra $\mathbf{e}_1$ til $\overrightarrow{OP}$, regnet med fortegn. Vi kalder r og θ punktets *polære* koordinater og skriver

$$(x,y) = (r,\theta)_{\text{pol}}.$$

Vi kalder r *radiusvektor* og θ *retningsvinkel*. Der gælder, at $r \geq 0$. Medens radiusvektor derved er entydigt bestemt, gælder dette ikke retningsvinklen: Ved addition af et helt multiplum af 2π fås det samme punkt, så alle værdier $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, kan benyttes.[3] For origo, altså $r = 0$, er θ helt ubestemt. Halvlinien ud fra origo i abscisseaksens positive retning kaldes *polaraksen*.

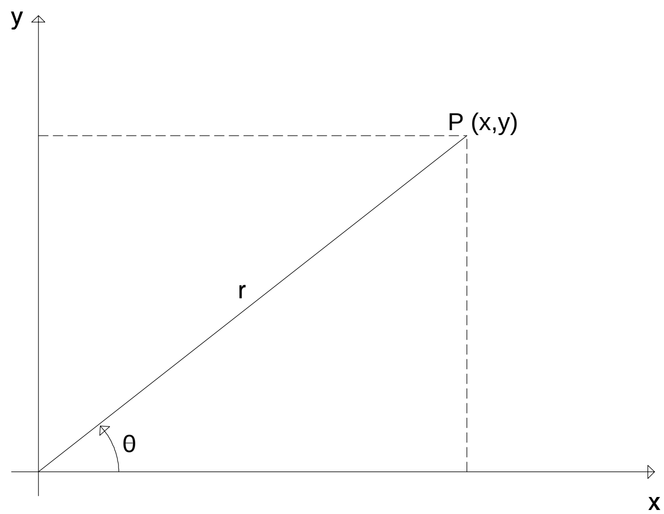
På figur 1 vises de cartesiske og de polære koordinater for punktet P. Af simple trigonometriske formler får man

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{4}$$

og

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

[2]Efter René Descartes (1596–1650), der på latin kaldte sig Cartesius.
[3]$\mathbb{Z}$ betegner mængden af hele tal.



Figur 1: Polære koordinater

Formel (4) angiver entydigt overgangen fra polære til cartesiske koordinater. Derimod angiver (5) kun radiusvektor entydigt ved den modsatte overgang. Dels tillader formlen for retningsvinklen θ ikke, at $x = 0$, dels er der for $x \neq 0$ en løsning, hvor $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, og den er falsk, hvis punktet ligger i 2. eller 3. kvadrant; så skal π adderes (eller subtraheres). Derfor skal man altid se på, hvilken kvadrant punktet ligger i.[4] Som en øvelse kan læseren dobbeltchecke ligningerne

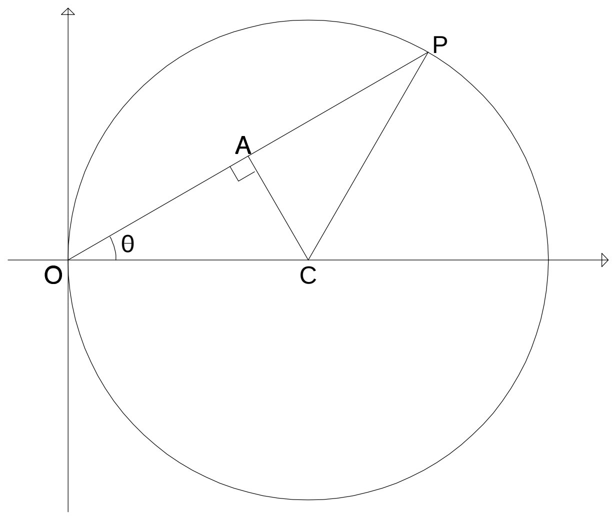
$$\begin{aligned} (1,0) &= (1,0)_{\text{pol}}, \\ (0,-2) &= (2,-\tfrac{1}{2}\pi)_{\text{pol}}, \\ (1,1) &= (\sqrt{2},\tfrac{1}{4}\pi)_{\text{pol}}, \\ (-1,\sqrt{3}) &= (2,\tfrac{2}{3}\pi)_{\text{pol}}, \end{aligned}$$

ved at verificere dem både forlæns og baglæns.

Vi skal se på en række eksempler på, hvordan en kurve kan beskrives i polære koordinater. Specielt beskriver ligningen $r = a$ en cirkel med centrum i origo og radius a. Ligningen $\theta = \alpha$ beskriver en halvlinie ud fra origo (stråle), der er drejet vinklen α ud fra polaraksen. I de tilfælde, hvor en stråle højst skærer kurven én gang, kan vi beskrive kurven ved en ligning af formen $r = g(\theta)$. Man skal her være opmærksom på, at man kun må bruge θ-værdier, for hvilke $r \geq 0$.[5] En kurve er symmetrisk omkring x-aksen, hvis ligningen bliver uforandret, når θ erstattes

[4] Mange lommeregnere kan direkte konvertere mellem (x,y) og $(r,\theta)_{\text{pol}}$.

[5] Nogle lærebogsforfattere tillader negative r, så $(-r,\theta)_{\text{pol}} = (r,\theta-\pi)_{\text{pol}}$. Herved kan nogle



Figur 2: Cirkel gennem origo

af $-\theta$. Den er symmetrisk om y-aksen, hvis ligningen bliver uforandret, når θ erstattes af $\pi-\theta$. Den er symmetrisk om origo, hvis ligningen bliver uforandret, når θ erstattes af $\theta-\pi$.

EKSEMPEL 1.1
En ret linie har i cartesiske koordinater ligningen $x+y=2$. Find dens ligning i polære koordinater.

Løsning: Ved brug af (4) fås $r\cos\theta + r\sin\theta = 2$. Tegn linien for at få θ-intervallet! Man får

$$r = \frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}, \qquad -\tfrac{1}{4}\pi < \theta < \tfrac{3}{4}\pi.$$

Man finder i øvrigt en symmetri, der ikke er omtalt ovenfor: Hvis θ erstattes af $\frac{1}{2}\pi-\theta$, bliver r uforandret, da sinus og cosinus byttes om; derfor er der symmetri om linien $y=x$, i polære kordinater strålen $\theta=\frac{1}{4}\pi$. □

EKSEMPEL 1.2
Find i polære koordinater ligningen for cirklen med centrum i $(a,0)$ og radius a.

smukke sløjfer beskrives simplere. Til gengæld er det vanskeligere at undersøge, hvornår to sæt polære koordinater bestemmer det samme punkt.

Løsning: Af fig. 2 ses, at $r = |OP| = 2|OA| = 2|OC|\cos\theta$. Da figuren ligger i 1. og 4. kvadrant, fås

$$r = 2a\cos\theta, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

Symmetrien omkring x-aksen aflæses af, at udtrykket (og θ-intervallet) ikke ændres, når θ skifter fortegn. □

Antag, at en kurve med ligningen $r = g(\theta)$ drejes en vinkel α omkring origo. Herved vil punktet P med $(r,\theta)_{\text{pol}}$ blive drejet over i punktet P_1 med $(r,\theta+\alpha)_{\text{pol}}$. For at P_1's polære koordinater kan passe i ligningen, må vi trække vinklen α fra. Vi har følgende resultat:

> Hvis en kurve med ligningen $r = g(\theta)$ drejes vinklen α, regnet med fortegn, så får den nye kurve ligningen $r = g(\theta-\alpha)$. (6)

EKSEMPEL 1.3
Hvilken kurve beskrives ved $r = \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$?

Løsning: Udtrykket kan omskrives til $r = \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi)$. Af eksempel 1.2 med $a = \frac{1}{2}$ ses, at der er tale om en en cirkel med centrum $(0, \frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$. □

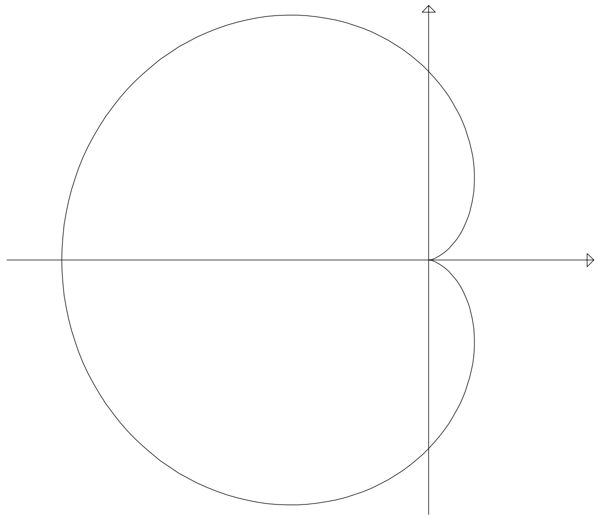
Vi skal nu se nogle eksempler på kurver, der beskrives i polære koordinater. Ved kurvetegningen skal man især være opmærksom på, hvornår $r = 0$, og om der θ-værdier, der skal udelukkes, fordi r er negativ. Støttepunkter plottes ved, at man for udvalgte θ-værdier afsætter den tilsvarende r-værdi ud ad strålen. I en del af tilfældene er r uforandret, når 2π adderes til θ. I så fald et det nok at angive et θ-interval af længde 2π, fx $-\pi < \theta \le \pi$ eller $0 \le \theta < 2\pi$.

EKSEMPEL 1.4
Skitsér kurven med ligningen $r = 1 - \cos\theta$. (Den kaldes *kardioiden.*)

Løsning: (Se fig. 3) Vi ser, at radiusvektor vokser fra 0 til 2, når retningsvinklen vokser fra 0 til π, og aftager fra 2 til 0, når retningsvinklen vokser fra π til 2π. Da udtrykket ikke ændres, når θ erstattes af $2\pi - \theta$ (eller skifter fortegn), er der symmetri omkring x-aksen. Her er nogle støttepunkter:

θ	0	$\pm\frac{1}{6}\pi$	$\pm\frac{1}{3}\pi$	$\pm\frac{1}{2}\pi$	$\pm\frac{2}{3}\pi$	$\pm\frac{5}{6}\pi$	π
r	0	$1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$	2

Disse værdier kan omregnes til decimalbrøk og evt. konverteres til cartesiske koordinater på en lommeregner. Omkring $\theta = 0$ går kurven direkte ud fra origo, og vi får en såkaldt *spids*. Dette svarer til, at der er to halvtangenter, der er ensrettede. (For almindelige tangenter er de modsat rettede.) Navnet kardioide skyldes hjerteformen. □



Figur 3: Kardioide

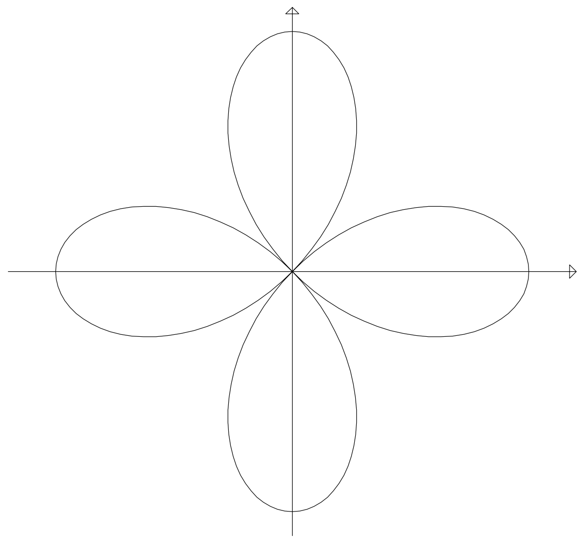
EKSEMPEL 1.5
Vis, at $r = |\cos 2\theta|$ beskriver en firebladet rose.

Løsning: (Se fig. 4) Der er spidser for $r = 0$, hvilket indtræffer for $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi, \pm\frac{3}{4}\pi$. Et enkelt "blad" fås for $-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$, hvor r antager sin maksimale værdi 1 for $\theta = 0$. Af (6) ses, at de andre blade fås ved at dreje et helt multiplum af $\frac{1}{2}\pi$ (se fig. 4). Hvis numerisktegnet fjernedes, altså $r = \cos 2\theta$, ville man kun få to blade, da $r < 0$ for $-\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq -\frac{1}{4}\pi$ og $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$. (Med kurvetegningsprogrammer, der tillader negative r, ville man stadig få alle fire blade.) $\square$

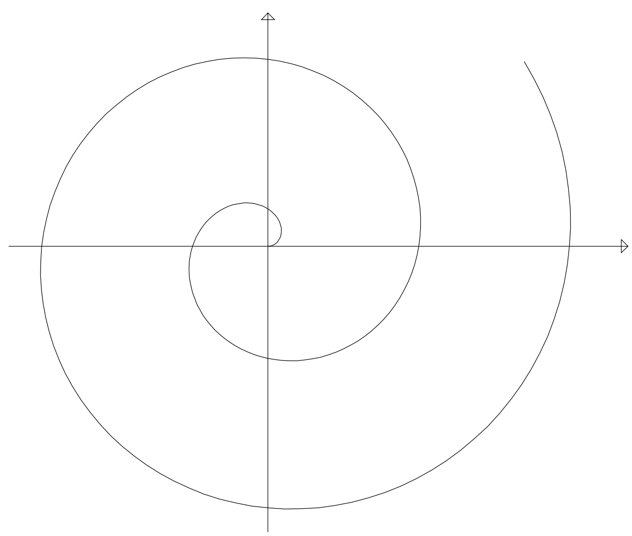
EKSEMPEL 1.6
(*Archimedes' spiral.*) Skitsér kurven givet ved ligningen $r = \frac{1}{2}\theta$.

Løsning: (Se fig. 5) Defineret for $\theta \geq 0$. r vokser jævnt som funktion af θ og forøges med π for hver omdrejning. $\square$

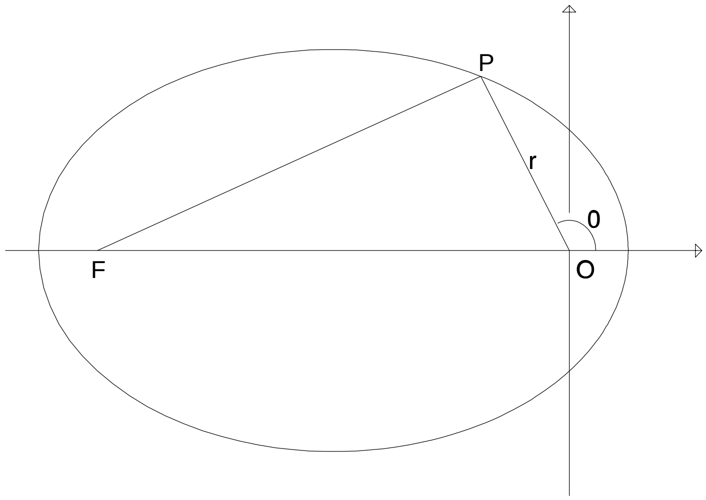
EKSEMPEL 1.7
Der er givet en ellipse med halvakser a og $b = a\sqrt{1-e^2}$, hvor e er excentriciteten. De to brændpunkter er hhv. i origo og modsat rettet polaraksen. Find ellipsens ligning i polære koordinater.



Figur 4: Firebladet rose



Figur 5: Archimedes' spiral



Figur 6: Ellipse

Løsning: (Se fig. 6) Lad P være et vilkårligt punkt på ellipsen, og lad brændpunkterne være O og F. Af cosinusrelationen (2) fås

$$|FP|^2 = |OP|^2 + |FO|^2 - 2|OP||FO|\cos(\pi - \theta),$$

som, da ellipsen er defineret ved $|FP| + |OP| = 2a$, og brændpunktsafstanden er $2ea$, bliver til

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4e^2a^2 + 4rea\cos\theta,$$

der efter reduktion kan omformes til

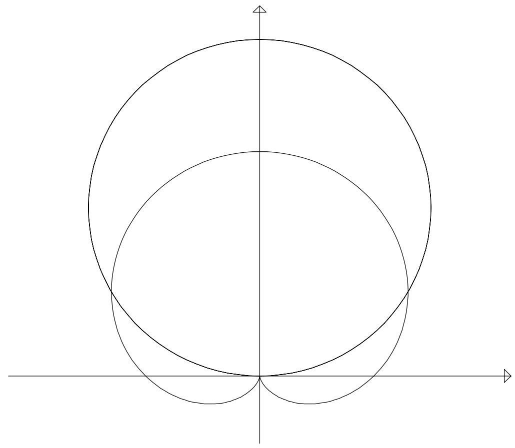
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

□

Ved forskellige anvendelser, fx arealberegning, har man brug for at finde skæringspunkterne mellem kurver beskrevne i polære koordinater. Her er der et problem, som man ikke har for cartesiske koordinater, nemlig at flere værdier af θ giver samme punkt.

EKSEMPEL 1.8
Find skæringspunkterne mellem kardioiden $r = 1 + \sin\theta$ og cirklen $r = 3\sin\theta$.

Løsning: (Se fig. 7) Idet $1 + \sin\theta = 1 - \cos(\theta + \frac{1}{2}\pi)$, er kardioiden drejet $-\frac{1}{2}\pi$ ud fra den i eksempel 1.4. På nær faktoren 3 er cirklen den i eksempel 1.3 nævnte. Vi sætter $1 + \sin\theta = 3\sin\theta$ og får $\sin\theta = \frac{1}{2}$ med løsninger $\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$. Herved fås



Figur 7: Kardioide og cirkel

skæringspunkterne $(\frac{3}{2},\frac{1}{6}\pi)_{\text{pol}}$ og $(\frac{3}{2},\frac{5}{6}\pi)_{\text{pol}}$ eller i cartesiske koordinater $(\frac{3}{4}\sqrt{3},\frac{3}{4})$ og $(-\frac{3}{4}\sqrt{3},\frac{3}{4})$. Da begge kurver går gennem origo, er dette også et fællespunkt, selv om man i ligningerne ikke får $r=0$ for de samme θ-værdier. Det er klogt altid at lave en skitse, da man ellers let kan overse nogle skæringspunkter. $\square$

EKSEMPEL 1.9
Find skæringspunkterne mellem Archimedes' spiral $r=\theta$ og strålen $\theta=\frac{1}{2}\pi$.

Løsning: Det er ikke nok at indsætte $\theta=\frac{1}{2}\pi$ i $r=\theta$, da addition af 2π giver samme retningsvinkel. (Tegn!) Vi må altså indsætte $\theta=\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, $k=0,1,\ldots$. (Ingen negative θ, da $\theta\geq 0$ for spiralen.) Endvidere er origo fællespunkt, altså

$$\text{origo},\quad (\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi)_{\text{pol}},\quad (\tfrac{5}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi)_{\text{pol}},\quad (\tfrac{9}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi)_{\text{pol}},\quad \ldots$$

eller på cartesisk form

$$(0,0),\quad (0,\tfrac{1}{2}\pi),\quad (0,\tfrac{5}{2}\pi),\quad (0,\tfrac{9}{2}\pi),\quad \ldots$$

$\square$

OPGAVER

1.1. Angiv polære koordinater for følgende punkter:

(a) $(0,-1)$, (b) $(1,1)$, (c) $(\sqrt{3},-1)$, (d) $(-\sqrt{3},-3)$, (e) $(-\sqrt{6},\sqrt{2})$.

1.2. Nedenstående punkter er sammenfaldende to og to på nær to umage. Find sammenhængen.

(a) $(2,\pi)_{\text{pol}}$, (b) $(0,1)_{\text{pol}}$, (c) $(3,\frac{1}{3}\pi)_{\text{pol}}$, (d) $(2,-117\pi)_{\text{pol}}$,
(e) $(2,0)_{\text{pol}}$, (f) $(3,-\frac{1}{3}\pi)_{\text{pol}}$, (g) $(0,\pi)_{\text{pol}}$, (h) $(3,\frac{8}{3}\pi)_{\text{pol}}$,
(i) $(3,\frac{11}{3}\pi)_{\text{pol}}$, (j) $(2,12\pi)_{\text{pol}}$.

Angiv en ligning i cartesiske koordinater for hver af nedenstående ligninger i polære koordinater. Angiv kurvetypen.

1.3. $r\cos\theta = 3$,

1.4. $r = 1/\sin\theta$.

1.5. $r = 2\sin\theta$.

1.6. $\cos^2\theta = \sin^2\theta$.

1.7. $r\cos\theta = \ln 2r + \ln\sin\theta$.

Find de cartesiske koordinater for skæringspunkterne mellem følgende kurver:

1.8. $r = 1$ og $r = 1+\cos\theta$.

1.9. $r = \sin\theta$ og $r = 1/(2\sin\theta)$,

1.10. $r = \sqrt{3}\cos\theta$ og $r = 1-\sin\theta$.

1.11. Skitsér grafen for $r = 2+\cos\theta$.

1.12. Opstil ligningen i polære koordinater og skitsér grafen for en seksbladet rose.

1.13. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) Bortset fra når $x = 0$, bestemmes retningsvinklen θ ved $\tan\theta = y/x$.

b) De polære koordinatsæt $(r_1,\theta_1)_{\text{pol}}$ og $(r_2,\theta_2)_{\text{pol}}$ bestemmer det samme punkt, hvis og kun hvis $r_1 = r_2$ og $\theta_1 = \theta_2$.

c) For et givet polært koordinatsæt $(r,\theta)_{\text{pol}}$ findes der kun ét cartesisk koordinatsæt, der bestemmer det samme punkt.

d) For en kurve beskrevet ved ligningen $r = g(\theta)$ er det nok at se på θ i intervallet $0 \le \theta < 2\pi$.

e) Amerikanske calculusbøger tillader normalt $r < 0$.

1.14. Skitsér grafen for $r = 1/(1 - \frac{1}{2}\cos\theta)$. Hvilken type kurve er det?

1.15. Skitsér grafen for $r = 1/(1 + \cos\theta)$. Hvilken type kurve er det?

1.16. Lad ℓ betegne en ret linie, der ikke går gennem origo. Lad P betegne projektionen af origo O på ℓ. Vis, at hvis afstanden er $d = |OP|$ og $\overrightarrow{OP}$ danner vinklen α med polaraksen, så er liniens ligning i polære koordinater $r = d/\cos(\theta - \alpha)$. (Vink: Geometrisk argument, eller drej linien $x = d$ og benyt (6).)

1.17. Find ligningen i cartesiske koordinater for cirklen i eksempel 1.2. Benyt den til at give en alternativ udledning af $r = 2a\cos\theta$.

1.18. Udled ellipseligningen i polære koordinater fra eksempel 1.7 ved at indsætte i ellipsens ligning i cartesiske koordinater.

1.19. (Lemniskaten.) Lad $A = (-1, 0)$ og $B = (1, 0)$ i cartesiske koordinater. Find ligningen i polære koordinater for kurven bestående af de punkter P, for hvilke $|PA| \cdot |PB| = 1$. (Vink: Benyt (2) og opg. 0.2.)

1.20. En hyperbel har halvakserne a og $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, hvor e er excentriciteten. Brændpunkterne er i origo og på polaraksen. Find ligningen i polære koordinater for den “venstre” gren af hyperblen.

1.21. Lad $0 \le a \le 1$. Kurven $r = 1 - a\cos\theta$ har et antal lodrette tangenter, der afhænger af a. Find sammenhængen. (Vink: Find (x, y) som funktion af θ.)

1.22. (*Logaritmisk spiral.*) Vis, at kurven bestemt ved $r = e^\theta$ har uendelig mange vindinger. Hvor mange vindinger kan man praktisk vise på en figur? (Tegn!)

2 Komplekse tal på cartesisk form

De første tal, man lærer om, er de naturlige tal, altså mængden $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. De tre prikker fortæller, at der ikke er noget største tal, og mere præcist udtrykkes dette ved induktionsaksiomet. $\mathbb{N}$ er lukket over for addition og multiplikation. For altid at gøre subtraktion mulig udvider man til mængden $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ af hele tal. Divisionen får man med (på nær division med nul) i mængden $\mathbb{Q}$ af rationale tal. Differential- og integralregning kræver, at grænseovergang er mulig, og hertil behøver man mængden $\mathbb{R}$ af reelle tal. Men stadig er der polynomier, der ikke har rødder, fx $x^2 + 1$.

For at løse dette problem indfører man mængden $\mathbb{C}$ af *komplekse tal*, der omfatter alle talpar $z = (x, y)$, hvor $x, y \in \mathbb{R}$. Vi kalder x den *reelle del* og y den *imaginære del*, og skriver $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Ofte afbilder man $z = (x, y)$ i planen på samme måde som en vektor i $\mathbb{R}^2$ og taler om den *komplekse plan* med den reelle og den imaginære akse.[6] Hvis $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, siges z at være *imaginær*. Hvis yderligere $\mathrm{Re}(z) = 0$, siges z at være *rent* imaginær.

Vi indfører addition og multiplikation af to komplekse tal $a = (a_1, a_2)$ og $b = (b_1, b_2)$ ved

$$a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \tag{7}$$

$$ab = (a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{8}$$

Hvis den imaginære del er nul, får man

$$(a_1, 0) + (b_1, 0) = (a_1 + b_1, 0), \qquad (a_1, 0)(b_1, 0) = (a_1 b_1, 0),$$

hvilket berettiger os til at identificere sådanne komplekse tal med de reelle tal, da der er isomorfi mht. addition og multiplikation. Vi skriver derfor $(x, 0) = x$. Specielt er $(0, 0) = 0$.

Det ses umiddelbart ved ombytninger i (7) og (8), at den *kommutative lov* gælder såvel for addition som for multiplikation, altså

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba.$$

Også den *associative lov* gælder for begge regningsarter, altså

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc).$$

For addition fås loven umiddelbart, da den gælder for de to dele hver for sig. For multiplikation overlades beviset til læseren (opg 2.16). Endvidere gælder den *distributive lov*

$$a(b + c) = ab + ac,$$

som vi nu vil bevise:

$$\begin{aligned}
a(b + c) &= (a_1, a_2)((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) \\
&= (a_1, a_2)(b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&= (a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_2)) \\
&= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 c_1 - a_2 c_2, a_1 c_2 + a_2 c_1) \\
&= ab + ac.
\end{aligned}$$

Da additionen foregår for hver del for sig, gælder dette også subtraktionen. Hvad angår division, skal vi for $a \neq 0$ løse ligningen

$$az = b \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2)(x, y) = (b_1, b_2),$$

[6] Kaldes ofte et Argand-diagram efter svejtseren Jean Robert Argand, selv om nordmanden Caspar Wessel var den første, der fandt på det. Men han publicerede på dansk!

der vha. (8) omformes til ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_1x - a_2y &= b_1, \\ a_2x + a_1y &= b_2, \end{aligned} \tag{9}$$

der har præcis én løsning, da determinanten er $a_1^2 + a_2^2$, som er ikke er nul pga. forbeholdet $a \neq 0$. For løsningen $z = (x,y)$ skrives $z = b/a$.

EKSEMPEL 2.1
Lad $a = (1,2)$ og $b = (-1,3)$. Find $a+b$, $b-a$, ab og b/a.

Løsning: Vi får $a+b = (0,5)$, $b-a = (-2,1)$, $ab = (-7,1)$, $b/a = (1,1)$. (Opstil og løs ligningssystemet (9) svarende til divisionen!) □

Det viser sig, at man kan undgå talparnotationen, hvis man indfører den såkaldt *imaginære enhed*

$$i = (0,1).$$

Af (8) ses, at $i^2 = -1$. Hermed får vi, at polynomiet $z^2 + 1$ har roden $z = i$. ($z = -i$ er den anden rod.) Vi har nu for $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + iy = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x,y).$$

Vi vil kalde begge skrivemåder, altså

$$z = (x,y) = x + iy$$

cartesisk form; i det følgende bruges sædvanligvis den sidste. Man behøver ikke at huske (8) for at kunne multiplicere, kun at $i^2 = -1$. For tallene i eksempel 2.1 fås

$$ab = (1+2i)(-1+3i) = -1 + 3i - 2i + 6i^2 = -7 + i.$$

For at lette divisionen indfører vi svarende til $z = x + iy$ den *komplekst konjugerede* $\overline{z} = x - iy$. Geometrisk svarer kompleks konjugering til spejling omkring den reelle akse. Det er let at vise følgende egenskaber ved kompleks konjugering:

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}, \quad \overline{a/b} = \overline{a}/\overline{b}, \quad \overline{\overline{a}} = a. \tag{10}$$

Vi overlader påvisningen til læseren (opg. 2.17) på nær for den midterste, for hvilken beviset ser således ud:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= \overline{(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)} \\ &= \overline{(a_1b_1 - a_2b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= (a_1 - ia_2)(b_1 - ib_2) \\ &= \overline{a}\,\overline{b} \end{aligned}$$

Længden af $z = x + iy$, opfattet som en vektor i $\mathbb{R}^2$, kaldes *modulus* (eller numerisk værdi) og betegnes $|z|$. Vi har

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Vi er nu i stand til at beregne brøken b/a på en simplere måde end ved at løse ligningssystemet (9). Vi forlænger brøken med den komplekst konjugerede til nævneren. Da

$$\frac{b}{a} = \frac{b\bar{a}}{a\bar{a}} = \frac{b\bar{a}}{|a|^2}$$

får reel nævner, er det let at finde den reelle del og den imaginære del af brøken. Vi illustrerer med et eksempel:

EKSEMPEL 2.2
Beregn b/a for tallene i eksempel 2.1 ved brug af kompleks konjugering.

Løsning:

$$\frac{b}{a} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{|1+2i|^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$$

□

Sammenfattende kan man sige, at man regner med komplekse tal på samme måde som med relle tal, idet man benytter den ekstra regel $i^2 = -1$ og forlænger brøker med den komplekst konjugerede til nævneren. Der er dog en undtagelse, nemlig reglen $|x|^2 = x^2$. Faktisk gælder altid $|z|^2 \neq z^2$, medmindre z er reel (opg. 2.18).

OPGAVER

Angiv følgende udtryk på cartesisk form $($*dvs.* $a+ib)$:

2.1. $(1+2i)-(3-4i)$.

2.2. $(2+3i)(-1+5i)$.

2.3. i^{99} .

2.4. $(2+i)(3-i)(2-i)(3+i)$.

2.5. $\dfrac{1}{3-2i}$.

2.6. $\dfrac{-17+7i}{2+3i}$.

2.7. $\dfrac{(31-43i)(75+61i)}{(61-75i)(43+31i)}$.

2.8. $\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}$.

Afbild nedenstående mængder af z-værdier i den komplekse plan.

2.9. $|z| < 1$.

2.10. $0 < |z| < 1$.

2.11. $|z-2i| > 2$.

2.12. $|z-i| = |z+i|$.

2.13. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-3}{i}\right) = 0$.

2.14. $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 0$.

2.15. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) Komplekse tal $z \in \mathbb{C}$ er det samme som talpar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Én af egenskaberne ved komplekse tal er, at de kan opfattes som talpar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Man kan ikke dividere med et komplekst tal $z = (x,y)$, hvis én af delene x eller y er lig nul.

d) Man kan dividere med et komplekst tal $z = (x,y)$, medmindre begge delene x og y er lig nul.

e) Hvis $\bar{z} = -z$, så er z rent imaginær.

2.16. Vis, at den associative lov for multiplikation af komplekse tal gælder, altså $a(bc) = (ab)c$.

2.17. Vis, at formlerne (10) for kompleks konjugering gælder.

2.18. Vis, at for komplekse tal gælder $|z^2| = z^2$, hvis og kun hvis $z \in \mathbb{R}$.

2.19. Udled *trekantsuligheden* for komplekse tal:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

(Vink: Benyt, at en side i en trekant er mindre end summen af de to andre og større end deres differens.) Hvornår kan der være lighedstegn?

3 Komplekse tal på polær form

Det komplekse tal $z = x + iy$ har, opfattet som et punkt (x, y) i den komplekse plan, naturligvis også polære koordinater. Vi siger, at

$$z = (r, \theta)_{\text{pol}}$$

er den *polære form* af tallet. Sammenhængen med den cartesiske form er givet ved

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{11}$$

Vi skriver

$$r = |z|, \qquad \theta = \arg(z),$$

hvor $|z|$ er den tidligere indførte modulus og $\arg(z)$ kaldes *argument*. Man kalder også den polære form for *modulus-argument-form*. Argumentet $\arg(z)$ er kun defineret på nær et helt multiplum af 2π. (For $z = 0$ er det helt udefineret.) Ved *hovedargumentet* forstås den retningsvinkel $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, for hvilken $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$.

EKSEMPEL 3.1
Angiv $z = -1 + i$ på polær form.

Løsning: Modulus er $|z| = \sqrt{2}$, og for argumentet fås $\tan\theta = -1$. Da z er i 2. kvadrant, vælges $\theta = \frac{3}{4}\pi$. Vi får $z = (\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)_{\text{pol}}$. (Tegn!) □

Den polære form er ikke meget bevendt ved addition og subtraktion. Derimod er den nyttig ved multiplikation og division. Lad

$$z_1 = x_1 + iy_1 = (r_1, \theta_1)_{\text{pol}}, \qquad z_2 = x_2 + iy_2 = (r_2, \theta_2)_{\text{pol}}.$$

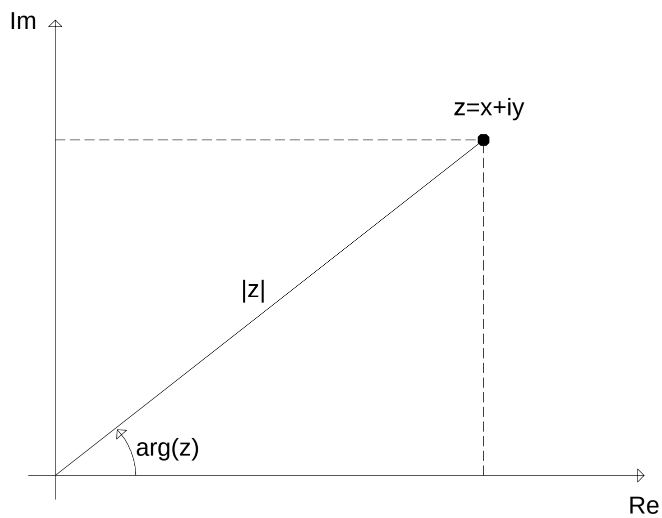
Vi har da

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)_{\text{pol}}, \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet to af additionsformlerne i (3). Vi har altså

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{12}$$

Udtrykt som en regel har vi:



Figur 8: Et komplekst tal

Ved multiplikation af komplekse tal multiplicerer man deres moduli og adderer deres argumenter.

(13)

Man bør være opmærksom flertydigheden i argumenterne. Hvis man for z_1 og z_2 angiver hovedargumenterne, kan man ikke være sikker på, at man ved addition får hovedargumentet for z_1z_2. (Overvej dette!) For divisionen gælder, at $w = z_2/z_1$ er løsningen til ligningen $z_1w = z_2$. Derfor fås af (12):

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \qquad \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1). \tag{14}$$

EKSEMPEL 3.2
Lad $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Beregn z_1z_2 og z_2/z_1 ved at benytte polær form.

Løsning: Vi har

$$z_1 = (2, \tfrac{1}{6}\pi)_{\text{pol}}, \qquad z_2 = (2, \tfrac{2}{3}\pi)_{\text{pol}},$$

og får derfor af (11)

$$z_1z_2 = (4, \tfrac{5}{6}\pi)_{\text{pol}} = -2\sqrt{3} + 2i,$$
$$\frac{z_2}{z_1} = (1, \tfrac{1}{2}\pi)_{\text{pol}} = i.$$

Resultatet kan også fås ved at benytte cartesisk form.[7] □

Multiplikationsreglen (13) er formuleret for et vilkårligt antal faktorer, selv om vi formelt kun har vist den for to faktorer. At

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1||z_2|\dots|z_n|, \quad \arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots + \arg(z_n)$$

gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, fås let ved et induktionsbevis. Er alle z'erne ens, får vi potensreglen

$$|z^n| = |z|^n, \qquad \arg(z^n) = n \arg(z), \tag{15}$$

der for $z \neq 0$ kan vises at gælde for alle $n \in \mathbb{Z}$.

EKSEMPEL 3.3
Beregn $(1 + i\sqrt{3})^3$.

Løsning: Udtrykket kan naturligvis beregnes direkte. Vi vil i stedet benytte polær form. For $z = 1 + i\sqrt{3}$ er modulus $|z| = 2$, og for argumentet fås $\tan\theta = \sqrt{3}$. Da z er i 1. kvadrant, bruges $\theta = \frac{1}{3}\pi$. Vi får $z = (2, \frac{1}{3}\pi)_{\text{pol}}$. Derfor er $z^3 = (8, \pi) = -8$. □

Specielt har man for $|z| = 1$, altså for tal på den *komplekse enhedscirkel*, at $z = (1,\theta)_{\text{pol}} = \cos\theta + i\sin\theta$ og heraf $z^n = (1, n\theta)_{\text{pol}} = \cos n\theta + i\sin n\theta$, altså har vi vist *de Moivres formel*[8]:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \tag{16}$$

EKSEMPEL 3.4
Udled formler for $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$.

Løsning: Ved brug af (16) fås

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\
&= \{\cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\} + i\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\} \\
&= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

Da realdelen og imaginærdelen stemmer overens, får vi formlerne

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$ □

[7] Dette eksempel overbeviser dig måske ikke om fordelene ved den polære form; men vent til du kommer til den binome ligning!

[8] Abraham de Moivre (1667–1754). Omtrentlig udtale: dø mu-ˈa-vrø, ø som i gøre.

Vi skal nu se på hvordan man løser den såkaldte *binome ligning*:

$$z^n = w,$$

hvor w er et givet komplekst tal. Vi ser bort fra det trivielle tilfælde $w = 0$, hvor kun $z = 0$ er løsning. Idet vi sætter $w = (r, \theta)_{\text{pol}}$, skal vi finde $z = (s, \varphi)_{\text{pol}}$. Vi får

$$(s^n, n\varphi)_{\text{pol}} = (r, \theta)_{\text{pol}}.$$

Da modulus er entydigt bestemt, fås $s = \sqrt[n]{r}$. Derimod er argumentet kun bestemt på nær et helt multiplum af 2π, så vi får

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

og dermed

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi får forskellige placeringer i den komplekse plan for $k = 0, 1, \ldots, n-1$, hvorefter der er periodisk gentagelse. De forskellige løsninger er derfor

$$z = \left(r^{1/n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right)_{\text{pol}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{17}$$

De n løsninger ligger i den komplekse plan som vinkelspidserne i en regulær n-kant. Vi vil kalde alle løsningerne n-terødder af w.

EKSEMPEL 3.5
Find de tre tredjerødder af $8i$.

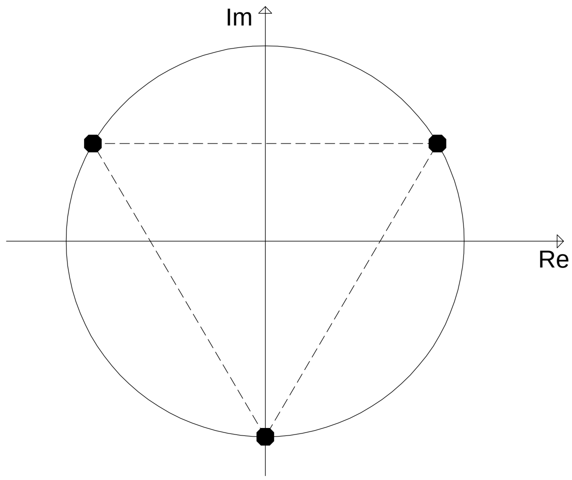
Løsning: Idet $z^3 = 8i = (8, \frac{1}{2}\pi)_{\text{pol}}$, er løsningerne i z:

$$(2, \tfrac{1}{6}\pi)_{\text{pol}}, \qquad (2, \tfrac{5}{6}\pi)_{\text{pol}}, \qquad (2, \tfrac{3}{2}\pi)_{\text{pol}},$$

eller i cartesiske koordinater

$$\sqrt{3} + i, \qquad -\sqrt{3} + i, \qquad -2i.$$

Rødderne udgør vinkelspidserne af en ensvinklet trekant (se fig. 9). □



Figur 9: De tre tredjerødder af i

EKSEMPEL 3.6
Find de seks sjetterødder af -64, og angiv dem på cartesisk form.

Løsning: På polær form er $-64 = (64, \pi)_{\text{pol}}$, hvorfor $z^6 = -64$ har løsningerne

$$z = \left(\sqrt[6]{64}, \frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)_{\text{pol}} = (2, \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{1}{3}\pi)_{\text{pol}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

De ligger alle på en cirkel med radius 2 og centrum i 0. Argumenterne er $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$. På cartesisk form er rødderne – med en sammentrængt skrivemåde – $z = \pm 2i, \pm\sqrt{3} \pm i$. Du er ikke færdig med dette eksempel, før du har indtegnet rødderne i den komplekse plan. □

OPGAVER

3.1. Angiv den polære form for følgende komplekse tal:

$$\text{(a) } -i, \text{ (b) } 1+i, \text{ (c) } \sqrt{3} - i, \text{ (d) } -\sqrt{3} - 3i, \text{ (e) } -\sqrt{6} + i\sqrt{2}.$$

3.2. Konvertér følgende polære former til cartesiske former:

$$\text{(a) } (2, -\tfrac{1}{4}\pi)_{\text{pol}}, \text{ (b) } (0, 1)_{\text{pol}}, \text{ (c) } (5, 5\pi)_{\text{pol}}, \text{ (d) } (\sqrt{2}, \tfrac{3}{4}\pi)_{\text{pol}}, \text{ (e) } (2, \tfrac{100}{3}\pi)_{\text{pol}}.$$

3.3. Løs ligningen $z^4 = -1$.

3.4. Løs ligningen $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

3.5. Løs ligningen $(z-1)^4 = 1$.

3.6. Løs ligningen $(z+1)^3 = -8$.

3.7. Find $(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2})^{100}$.

3.8. Find $(1+i)^{20}$.

3.9. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) For alle z er hovedargumentet $\operatorname{Arg}(z)$ entydigt bestemt.

b) For alle $z \neq 0$ er hovedargumentet $\operatorname{Arg}(z)$ entydigt bestemt.

c) Der er en simpel formel for addition af komplekse tal på polær form.

d) Den polære form er velegnet ved potensopløftning og roduddragning.

e) Hvis $(a+ib)^3 = 8$, så er $a^2 + b^2 = 4$.

3.10. For hvilke komplekse tal z er $\overline{z} = 1/z$?

3.11. For hvilke tal z er z^2 i 2. kvadrant ($\operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$)?

3.12. For hvilke tal z er z^3 i 2. kvadrant?

3.13. Lad $s = \sin 18^o$. Vis, at $\sin 54^o = 3s - 4s^3 = \cos 36^o$, og dermed, at s tilfredsstiller ligningen $4s^3 - 2s^2 - 3s + 1 = 0$. Find $\sin 18^o$.

4 Det komplekse andengradspolynomium

Vi ser først på ligningen
$$z^2 = w,$$
hvor $w = u + iv$ er et komplekst tal. Ved at skrive w på polær form, altså $w = (r, \theta)_{\text{pol}}$, kan vi finde de to løsninger ved at tage kvadratrod af modulus og halvere argumentet (løsningen (17) til den binome ligning med $n = 2$). Her skal gives en anden metode.

For w reel, altså $w = u$, kender vi i forvejen resultatet. For $u > 0$ er der de reelle løsninger $z = \pm\sqrt{u}$, for $u = 0$ er der én løsning $z = 0$, og for $u < 0$ er der de to rent imaginære løsninger $z = \pm i\sqrt{-u}$.

Vi antager dernæst, at w er imaginær, altså $v \neq 0$. Vi sætter $z = x + iy$, og da $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, får vi ved at identificere reelle dele for sig og imaginære dele for sig ligningerne

$$x^2 - y^2 = u\,, \qquad 2xy = v\,.$$

Da vi antog, at $v \neq 0$, må også $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Vi finder af den sidste ligning $y = v/2x$, som ved indsættelse i den første efter omformning giver

$$x^4 - ux^2 - \frac{v^2}{4} = 0\,.$$

Dette er en *reel* andengradsligning i x^2 med diskriminant $u^2 + v^2 = r^2$, hvor r er modulus for w, altså $r = |w|$. Vi får $x^2 = \frac{1}{2}(u \pm r)$. Da $|u| < r$ (husk $v \neq 0$), giver $x^2 = \frac{1}{2}(u - r)$ ingen løsning, idet x^2 ikke kan være negativ. Af $x^2 = \frac{1}{2}(u + r)$ fås

$$x = \pm\sqrt{\frac{r+u}{2}}\,,$$

og dermed ved indsættelse

$$y = \frac{v}{\pm 2\sqrt{\dfrac{r+u}{2}}} = \pm\frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{r-u}{2}}\,,$$

hvor vi har forlænget brøken med $\sqrt{r-u}$ og benyttet $|v| = \sqrt{v^2} = \sqrt{r^2 - u^2}$. Vi indfører fortegnsfunktionen (for reelle tal)

$$\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0\,, \\ -1 & \text{for } x < 0\,, \end{cases}$$

og får, da fortegnene hører sammen, de to løsninger til $z^2 = w = u + iv$

$$\boxed{z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+u}{2}} + i\,\operatorname{sign}(v)\sqrt{\frac{r-u}{2}}\right)\,.} \qquad (18)$$

Vi bemærker, at for $v = 0$ kan vi også bruge formlen, hvis vi negligerer $\operatorname{sign}(v)$, da enten den reelle eller den imaginære del forsvinder.

EKSEMPEL 4.1
Vi ønsker at løse ligningen $z^2 = 3 - 4i$.

Løsning: Da modulus er $r = \sqrt{9+16} = 5$, giver formel (18)

$$z = \pm\left(\sqrt{5 + \frac{3}{2}} - i\sqrt{5 - \frac{3}{2}}\right) = \begin{cases} \;\;2 - i, \\ -2 + i. \end{cases}$$

□

Vi ser nu på den generelle komplekse andengradsligning

$$az^2 + bz + c = 0\,,$$

hvor a, b og c er *komplekse* konstanter, med $a \neq 0$. Vi benytter den samme metode som ved løsning af den reelle andengradsligning, nemlig *kvadratudfyldning*. Da metoden er vigtig, skal beviset gentages her. Vi sætter a uden for parentes og opfatter z^2 som det ene kvadratled og bz/a som det dobbelte produkt. Vi udfylder med det andet kvadratled $(b/2a)^2$ og får

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\,.$$

Vi indfører diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ på samme måde som for reelle tal og får ligningen

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2}\,.$$

Når to komplekse tal har samme kvadrat, følger det af (18), at de enten er ens eller ens med modsat fortegn, så

$$z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{d}}{2a}\,,$$

og vi får samme løsningsformel som for den reelle andengradsligning

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}\,, \qquad d = b^2 - 4ac\,.}$$

I modsætning til for reelle tal er $\sqrt{d}$ ikke veldefineret, da ligningen $z^2 = d$ har to løsninger, hvoraf ingen særligt kan fremhæves. Dette giver dog ingen problemer her, på grund af at der står $\pm$ i formlen. Vi ser, at vi i det komplekse tilfælde altid får to forskellige rødder, bortset fra tilfældet $d = 0$, hvor $z = -b/2a$ er dobbeltrod.[9]

EKSEMPEL 4.2
Løs ligningen

$$(3 - i)z^2 - (9 - 3i)z + 10 = 0\,.$$

[9] Egentlig burde man ikke bruge navnet diskriminant i det komplekse tilfælde, da d ikke diskriminerer mellem, om der er rødder eller ej, som i det reelle tilfælde.

Løsning: Vi får $d = (9-3i)^2 - 40(3-i) = -48-14i$ med modulus $r = \sqrt{48^2+14^2} = 50$, så

$$\sqrt{d} = \pm\left(\sqrt{\frac{50-48}{2}} - i\sqrt{\frac{50+48}{2}}\right) = \pm(1-7i)\,.$$

Derfor er løsningen

$$z = \frac{(9-3i)\pm(1-7i)}{2(3-i)} = \begin{cases} \dfrac{(1-i)(3+i)}{2} & = 2-i\,, \\ \dfrac{(2+i)(3+i)}{5} & = 1+i\,. \end{cases}$$

□

EKSEMPEL 4.3
Løs ligningen

$$iz^4 + (1+i)z^2 + 1 = 0\,.$$

Løsning: Vi opfatter først udtrykket som en andengradsligning i z^2, med $d = (1+i)^2 - 4i = (1-i)^2$. Vi får

$$z^2 = \frac{-(1+i)\pm(1-i)}{2i} = \begin{cases} -1 \\ i \end{cases}$$

For $z^2 = -1$ er $z = \pm i$, og for $z^2 = i$ er $z = \pm(1+i)/\sqrt{2}$. Vi får de fire rødder i fjerdegradspolynomiet $z = i, -i, \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i), -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$. □

OPGAVER

Løs følgende andengradsligninger:

4.1. $z^2 + 8i = 0\,.$

4.2. $z^2 = 80 + 18i\,.$

4.3. $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$

4.4. $z^2 - 2z + 5 = 0\,.$

4.5. $z^2 - (1+i)z + i = 0\,.$

4.6. $z^2 - (1+i)cz + ic^2 = 0$, hvor $c \in \mathbb{C}$ er givet.

4.7. $z^2-(2+5i)z-9+7i=0\,.$

4.8. $\sqrt{3}z^2-9z+7\sqrt{3}+3i=0\,.$

4.9. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) For komplekse tal z er kvadratroden $\sqrt{z}$ veldefineret.

b) En andengradsligning har altid mindst én kompleks løsning.

c) En andengradsligning har altid mindst én imaginær løsning.

d) En andengradsligning har altid to forskellige komplekse løsninger.

e) Til løsning af ligningen $z^2=w$ er det i nogle tilfælde bedst at bruge formel (18), i andre tilfælde formel (17).

Løs følgende ligninger og afbild løsningerne i den komplekse plan:

4.10. $z^4-3z^2-4=0.$

4.11. $z^3-2z^2+2z=0.$

4.12. $z^8+3z^4-4=0.$

4.13. $z^6-(1+8i)z^3+8i=0.$

4.14. Find fejlen i følgende "bevis" for, at $1=-1$:
$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=i^2=-1\,.$$

5 Det komplekse polynomium af *n*'te grad

Lad
$$p(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0\,,$$
hvor $c_0,c_1,\dots c_n\in\mathbb{C}$ og $c_n\neq 0$. For et $\alpha\in\mathbb{C}$ får vi ved polynomiers division, der forløber på samme måde som for reelle polynomier,
$$p(z)=(z-\alpha)q(z)+r\,,$$
hvor kvotienten $q(z)$ er et polynomium af $(n-1)$'te grad og resten $r\in\mathbb{C}$. Vi ser, at $p(\alpha)=r$, altså det for reelle polynomier velkendte resultat, at α er rod i $p(z)$, hvis og kun hvis $z-\alpha$ går op i $p(z)$.

Hvad angår *eksistensen* af rødder gælder der *algebraens fundamentalsætning*, der siger, at ethvert komplekst polynomium (af grad $n\geq 1$) har mindst én kompleks rod.[10] Hvis α er rod, går $z-\alpha$ op, og vi kan anvende sætningen igen på

[10]Først bevist i 1799 af C. F. Gauss (1777-1855).

kvotientpolynomiet $q(z)$. Således fortsættes, indtil vi når ned til 0'te grad, hvorfor vi altid kan skrive

$$p(z) = c_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)\,.$$

Hvis nogle af α'erne forekommer flere gange, taler vi om multiple rødder.

Et andet spørgsmål er, hvordan man *finder* rødderne. For $n = 2$ har vi allerede løst problemet. Der findes også formler for rødder i tredje- og fjerdegradspolynomier, hvor løsningerne indeholder kvadrat-, kubik- og fjerderødder.[11] Derimod er det kun i specielle tilfælde muligt at opstille en tilsvarende formel for femtegradspolynomier.[12] Hvis man ikke behøver de eksakte værdier, kan man altid ved numeriske metoder finde rødderne med en foreskreven nøjagtighed.

EKSEMPEL 5.1
Find rødderne i

$$p(z) = z^3 + z^2 + 2iz + 2i\,.$$

Løsning: Vi ser umiddelbart ved indsættelse, at $z = -1$ er rod. Derfor går $z+1$ op. Ved polynomiers division omskrives til $p(z) = (z+1)(z^2+2i)$, og de andre rødder er derfor $z = \pm(1-i)$. □

Ved mange anvendelser, fx reguleringsteknik, får man brug for at finde *komplekse* rødder til polynomier med *reelle* koefficienter, altså

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

hvor $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$. Antag, at $z_0 = x_0 + iy_0$ er rod, altså $p(z_0) = 0$. Vi får ved indsættelse

$$a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0\,.$$

Vi komplekst konjugerer denne ligning og benytter formlerne $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ og $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$:

$$a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1}\bar{z}_0^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0\,.$$

Denne ligning viser, at også $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ er rod. Vi har vist:

Hvis et polynomium med *reelle* koefficienter har en imaginær rod, så er også det komplekst konjugerede tal rod.

(19)

[11] Formlerne er ikke mere indviklede, end at vi godt kunne tage dem med, hvis vi havde en lektion mere.

[12] Dette blev bevist i 1826 af af den norske matematiker Niels Henrik Abel (1802–1829).

EKSEMPEL 5.2
Opstil et reelt polynomium, der har rødderne 1 og $2+i$.

Løsning: Da $2+i$ er rod, må også $2-i$ være rod. Derfor kan vi bruge

$$\begin{aligned}(z-1)(z-2-i)(z-2+i) &= (z-1)(z^2-4z+5)\\ &= z^3-5z^2+9z-5\,.\end{aligned}$$

□

EKSEMPEL 5.3
Find rødderne i polynomiet

$$p(z) = 3z^3-7z^2+8z-2\,.$$

Løsning: Hvis der er en rational rod, altså $z = a/b$, hvor $a/b \in \mathbb{Z}$, og brøken er uforkortelig, gælder der den regel, at a går op i det konstante led, og b går op i koefficienten til leddet af højest grad (se opg. 5.14). I vort tilfælde får vi mulighederne $a = \pm 1, \pm 2$ og $b = \pm 1, \pm 3$, altså $z = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$. Vi gør prøve og starter med $z = \pm\frac{1}{3}$:

$$p(\pm\tfrac{1}{3}) = \pm\tfrac{1}{9} - \tfrac{7}{9} \pm \tfrac{8}{3} - 2\,.$$

Der var bid, idet $z = \frac{1}{3}$ er rod. Derfor går $z - \frac{1}{3}$ og (for at undgå brøker) $3z-1$ op. Ved polynomiers division fås

$$p(z) = (3z-1)(z^2-2z+2)\,.$$

For z^2-2z+2 er $d = -4$, så $z = 1 \pm i$ er rødder. Sammenfattende er rødderne $z = \frac{1}{3}, 1+i, 1-i$. □

EKSEMPEL 5.4
Find rødderne i polynomiet

$$p(z) = z^4-8z^3+27z^2-38z+26\,,$$

idet der oplyses, at $z = 1+i$ er rod.

Løsning: Da $1+i$ er rod, er $1-i$ også rod, hvorfor $(z-1-i)(z-1+i) = z^2 - 2z+2$ må gå op. Vi finder ved polynomiers division, at

$$p(z) = (z^2-2z+2)(z^2-6z+13)\,.$$

For $z^2-6z+13$ er $d = -16$, så rødderne er $z = 3 \pm 2i$. De fire rødder er altså $z = 1+i, 1-i, 3+2i, 3-2i$. □

OPGAVER

Find rødderne til følgende polynomier:

5.1. $z^3 + z$.

5.2. $z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

5.3. $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 2$.

5.4. $z^8 + 3z^4 - 4$.

5.5. $z^6 + \frac{1}{4}z^4 + 4z^2 + 1$.

5.6. $iz^6 - (8+i)z^3 + 8$.

Find rødderne til følgende polynomier, med en rod opgivet:

5.7. $z^3 - 3iz^2 - 4z + 2i$, $\quad z = i$ er rod.

5.8. $z^3 - (1+8i)z^2 - (23+8i)z - 33 + 48i$, $\quad z = -3$ er rod.

5.9. $z^4 - 12z^3 + 62z^2 - 140z + 125$, $\quad z = 2+i$ er rod.

5.10. $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2$, $\quad z = 1-i$ er rod.

5.11. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) Hvis et polynomium med komplekse koefficienter har en imaginær rod, så er også det komplekst konjugerede tal rod.

b) Et komplekst polynomium af n'te grad har altid n forskellige rødder.

c) Et komplekst polynomium af n'te grad har altid n rødder, hvis hver rods multiplicitet tages i betragtning.

d) Hvis man for et vilkårligt fjerdegradspolynomium med reelle koefficienter kender en rod, kan man ved at benytte dette notats metoder finde alle rødderne.

e) Hvis man for et vilkårligt fjerdegradspolynomium med reelle koefficienter kender en imaginær rod, kan man ved at benytte dette notats metoder finde alle rødderne.

5.12. Afbild rødderne til polynomiet $z^5 + z$ i den komplekse plan. Vis, at de danner samme mønster som femmeren på en terning.

5.13. Angiv et sjettegradspolynomium, hvis rødder afbildet i planen danner samme mønster som sekseren på en terning.

5.14. Antag, at $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ har heltallige koefficienter, og at $z = a/b \in \mathbb{Q}$ er en rod (skrevet som uforkortelig brøk). Vis, at $a \mid a_0$ og $b \mid a_n$ ("$|$" betyder "går op i"). (Vink: Indsæt og forlæng med b^n. I hvilke led går a automatisk op?)

6 Den komplekse eksponentialfunktion

Vi skal nu definere $\exp(z) = e^z$ for $z \in \mathbb{C}$. Vi starter med tilfældet, hvor z er rent imaginær, altså $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Vi definerer

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,. \tag{20}$$

Denne definition må ikke være i konflikt med den tidligere indførte definition af den reelle eksponentialfunktion e^x, $x \in \mathbb{R}$. Det eneste sammenfald fås for $\theta = 0$, hvor $e^{i0} = e^0 = 1$, som den skal. Vi vil gerne bevare så mange egenskaber ved eksponentialfunktionen som muligt. Vi ser først af (20), at $e^{i\theta}$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$ ligger på enhedscirklen $|z| = 1$ i den komplekse plan, hvorfor $e^{i\theta} \neq 0$. Endvidere gælder potensreglerne

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,, \tag{21}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}\,, \tag{22}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{23}$$

Disse formler udledes simpelt ud fra (13), (14) og (15), idet der gælder $e^{i\theta} = (1,\theta)_{\text{pol}}$.

Dernæst defineres den generelle komplekse eksponentialfunktion e^z, hvor $z = x + iy$. Da e^x og e^{iy} allerede er definerede, og vi gerne vil have potensreglerne bevarede, definerer vi

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,.$$

For overgang til polær form har vi heraf

$$e^z = e^{x+iy} = (e^x, y)_{\text{pol}}. \tag{24}$$

Ved at benytte formlerne (21), (22) og (23) samt de tilsvarende formler for den reelle eksponentialfunktion, eller direkte ud fra (24), fås, at de sædvanlige regneregler gælder:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}\,, \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}\,, \qquad (e^z)^n = e^{nz}\,,\ \ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Vi ser specielt, at $e^{i\pi} = -1$, som omformes til[13]

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,. \tag{25}$$

[13] Nogle opfatter (25) som den smukkeste formel i matematikken, da den sammenknytter de fem vigtigste matematiske konstanter. Andre har ikke sans for den slags. Ligesom nogle glæder sig over skønheden af en nyudsprungen bøgeskov, medens andre kun ser på, hvor meget gavntømmer skoven kan producere.

Ved at gå via den polære form ser man, at den binome ligning af n'te grad

$$z^n = w$$

har følgende løsninger (svarende til (17))

$$\boxed{z = \sqrt[n]{|w|}\ \exp\left\{ i\left(\frac{\arg(w)}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right\}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1,} \tag{26}$$

Specielt har ligningen $z^n = 1$ som løsninger de n enhedsrødder

$$e^{2\pi k i/n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

En vigtig egenskab ved eksponentialfunktionen er, at den er så let at differentiere, svarende til at den er løsning til en simpel differentialligning. For at generalisere til den komplekse eksponentialfunktion indfører vi begrebet kompleks funktion af en reel variabel. For $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sætter vi

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t),$$

hvor $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi siger, at f er kontinuert, hvis både f_1 og f_2 er kontinuerte. Endvidere, at f er differentiabel, hvis både f_1 og f_2 er det, og i så fald definerer vi differentialkvotienten

$$f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t).$$

Det ses umiddelbart, at $f'(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis f er en (kompleks) konstant funktion. Endvidere har vi de sædvanlige differentiationsregler

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (cf)' = cf', \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

Den første formel bevises således:

$$\begin{aligned}(f+g)' = \{(f_1+g_1) + i(f_2+g_2)\}' &= (f_1+g_1)' + i(f_2'+g_2') \\ &= (f_1' + i f_2') + (g_1' + i g_2') = f' + g'.\end{aligned}$$

Den sidste formel kræver mere regneri (se opg. 6.8), og den mellemste fås som et specielt tilfælde af den sidste.

Vi er nu rede til at differentiere e^{ct}, hvor $c = a + ib$ er en kompleks konstant. Vi får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{ct} &= \frac{d}{dt}(e^{at}\cos bt + ie^{at}\sin bt) \\ &= (ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt) + i(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt) \\ &= e^{at}\{(a+ib)\cos bt + (-b+ia)\sin bt\} \\ &= (a+ib)e^{at}(\cos bt + i\sin bt) \\ &= ce^{ct}.\end{aligned}$$

Vi har dermed vist, at e^{ct} differentieres på sædvanlig måde og tilfredsstiller differentialligningen $z' = cz$. Specielt med rent imaginær eksponent får man

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}\,.$$

Denne formel er central for elektrisk kredsløbsteori, hvor der indgår modstande, spoler og kondensatorer.[14]

EKSEMPEL 6.1
Find differentialkvotienten af $f(t) = e^{2it}(3+it)$.

Løsning: Ved brug af produktreglen fås

$$f'(t) = 2i\,e^{2it}(3+it) + i\,e^{2it} = e^{2it}(7i-2t)\,. \qquad \square$$

OPGAVER

Find differentialkvotienten af følgende komplekse funktioner af en reel variabel:

6.1. $f(t) = \cos t + i\ln t\,.$

6.2. $f(t) = (e^t - 2it)^3\,.$

6.3. $f(t) = e^{it}\cos t\,.$

6.4. $f(t) = e^{(2+i)t}(2-i)\,.$

6.5. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) For den komplekse eksponentialfunktion gælder der stort set de samme regneregler som for den reelle.

b) Det er simplere at gå fra udtryk på eksponentialform til polær form end til cartesisk form.

c) Den komplekse eksponentialfunktion differentieres på samme måde som den reelle.

[14] Elektroingeniører har tradition for at bruge j for den imaginære enhed, da de bruger i for strømstyrken.

d) (Som bekendt kan logaritmen defineres som den omvendte funktion af eksponentialfunktionen.) Den komplekse logaritme $\ln z$ er for $z \neq 0$ entydigt defineret ved

$$w = \ln z \quad \Leftrightarrow \quad z = e^w.$$

e) En mulig definition af kompleks logaritme er

$$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \quad z \neq 0.$$

6.6. Vis, at en drejning med vinklen α omkring origo kan beskrives ved multiplikation med et komplekst tal. Angiv tallet.

6.7. Udled *Euler*s formler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

6.8. Vis ved at se på realdel og imaginærdel for sig, at produktreglen $(fg)' = f'g + fg'$ også gælder for en kompleks funktion af en reel variabel.

6.9. Vis *uden* at se på realdel og imaginærdel for sig, at kvotientreglen

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

også gælder for en kompleks funktion af en reel variabel.

6.10. Vis, at $f(t) = e^{ict}$ tilfredsstiller differentialligningen $f''(t) + c^2 f(t) = 0$.

6.11. En vekselstrøm kan beskrives ved $I = A\cos(\omega t + \varphi)$, hvor A er amplituden, ω vinkelhastigheden ($\nu = \omega/2\pi$ er frekvensen) og φ er faseforskydningen. Vis, at hvis man superponerer (adderer) to vekselstrømme med samme ω, fås igen en vekselstrøm med dette ω. (Vink: Sæt $\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t + \varphi)}\right)$; det er daglig rutine for elektroingeniører, der dog normalt lader “Re” være underforstået.)

7 Homogene lineære differentialligninger

Ved en homogen lineær differentialligning af n’te orden forstås en differentialligning af formen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{27}$$

hvor $a_n \neq 0$. Hvis derimod nullet på højre side er erstattet af en given funktion $g(x)$, siges differentialligningen at være *inhomogen* (se afsnit 8). Vi vil i dette notesæt antage, at $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er konstanter (reelle tal, når intet andet nævnes). Ved en løsning forstås en funktion $y = y(x)$,[15] der indsat i (27) giver et sandt udsagn. Vi indfører den *elementære differentialoperator* $D = \dfrac{d}{dx}$, så altså

$$Dy = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Ved anvendelse af D flere gange fås afledede af højere orden, altså

$$D^k y = \left(\frac{d}{dx}\right)^k y = \frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)}.$$

Vi kan åbenbart skrive (27) på formen

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{(n-1)} y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = 0.$$

Vi indfører *det karakteristiske polynomium*

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r + a_0,$$

og bemærker, at en differentialligning af orden n har karakteristisk polynomium af grad n. Hvis man erstatter den variable r med operatoren D, får man en *lineær differentialoperator*

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0,$$

og kan kort skrive (27) på formen $p(D)y = 0$.[16]

EKSEMPEL 7.1
Angiv differentialoperatoren og det karakteristiske polynomium svarende til tredjeordensdifferentialligningen

$$y''' - \frac{1}{2}y'' - \frac{13}{2}y' - 3y = 0,$$

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} p(D) &= D^3 - \tfrac{1}{2}D^2 - \tfrac{13}{2}D - 3, \\ p(r) &= r^3 - \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{13}{2}r - 3, \end{aligned}$$

□

[15] Det er vigtigt, at man forstår forskellen på funktion og funktionsværdi, hvorfor man i den elementære undervisning oftest skriver $y = f(x)$ for at markere forskellen. Nogle purister vil forlange, at man bliver ved med det.

[16] De samme purister vil forlange, at hvert led indeholder en operator. Det sidste led a_0 skal i så fald erstattes af $a_0 I$, hvor I er den identiske operator.

Da y nødvendigvis må være n gange differentiabel for at kunne være en løsning, kan vi opfatte $p(D)$ som en afbildning (transformation)

$$p(D) : \mathcal{D}^{\setminus} \to \mathcal{F},$$

hvor $\mathcal{F}$ er vektorrummet af reelle (eller komplekse) funktioner af en reel variabel,[17] og $\mathcal{D}^{\setminus}$ er underrummet af n gange differentiable funktioner. Det er nu afgørende, at lineariteten af differentiationen D medfører, at $p(D)$ er lineær, altså

$$\begin{aligned} p(D)(y_1 + y_2) &= p(D)y_1 + p(D)y_2, \\ p(D)(ay) &= ap(D)y, \end{aligned} \tag{28}$$

(se opg. 7.27). Vi kan derfor opfatte den fuldstændige løsning til $p(D)y = 0$ som nulrummet for differentialoperatoren $p(D)$. Det gælder det vigtige resultat, at nulrummet har dimension lig ordenen af $p(D)$, altså

For en homogen lineær differentialligning af n'te orden udgør den fuldstændige løsning et vektorrum af dimension n.

(29)

Beviset for, at dimensionen *mindst* er n vil fremgå af resten af dette afsnit. At den *højst* er n, vil det føre for vidt at bevise her.

Vi skal altså for at løse (27) finde n lineært uafhængige løsninger $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Disse må være en basis for løsningsrummet, så den fuldstændige løsning bliver

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er *arbitrære konstanter*.

EKSEMPEL 7.2
Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - y = 0.$$

Løsning: Ved indsættelse i ligningen ses direkte, at både $y = e^x$ og $y = e^{-x}$ er løsninger. De er lineært uafhængige, da de ikke er proportionale (vis det!). Derfor er den fuldstændige løsning

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

□

[17] For funktionen $y = y(x)$ vil vi altid antage, at x er reel, hvorimod det kan være en fordel i mellemregningerne at betragte y som kompleks, også selv om man kun er interesseret i løsninger med reelle y.

For at tage hul på problemet med, hvordan man i almindelighed løser (27), prøver vi, om der eventuelt skulle være en løsning af formen $y = e^{rx}$, hvor r er et reelt (eller måske komplekst) tal. Da der gælder $y' = re^{rx}$ og mere generelt $y^{(k)} = r^k e^{rx}$, får vi ved indsættelse

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{(n-1)} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0.$$

En lidt mere avanceret måde at skrive det samme på er, at da $D^k e^{rx} = r^k e^{rx}$, må

$$p(D)e^{rx} = p(r)e^{rx},$$

som så skal sættes lig nul. Da e^{rx} ikke er nulfunktionen (faktisk er den *aldrig* nul), får vi altså en løsning, hvis og kun hvis $p(r) = 0$, altså r er rod i det karakteristiske polynomium. Vi er nu i stand til at løse differentialligninger, for hvilke det karakteristiske polynomium $p(r)$ har n forskellige relle rødder.

EKSEMPEL 7.3
Løs differentialligningen i eksempel 7.1.

Løsning: Ved at multiplicere polynomiet med 2 får man, at r skal være rod i polynomiet

$$2r^3 - r^2 - 13r - 6,$$

der har heltallige koefficienter. Kandidater til rationale rødder er ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. Ved at prøve sig frem, eventuelt med polynomiers division efter den første succes, ser man, at rødderne er $r = -2,\ 3,\ -\frac{1}{2}$. Den fuldstændige løsning er da

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \qquad \square$$

Den omhyggelige læser vil efter at have gennemregnet dette eksempel stille følgende spørgsmål: Kan vi være sikre på, at de tre eksponentialfunktioner er lineært uafhængige, så de udspænder et tredimensionalt løsningsrum? Det var jo let nok, hvis der kun var to, da de ikke er proportionale.[18] Men hvad med tre?

For at sikre os, at n forskellige eksponentialfunktioner udspænder et n-dimensionalt rum, vil vi vise følgende sætning:

SÆTNING 7.4
Hvis tallene $r_1, r_2, \ldots, r_k$ alle er forskellige, så er eksponentialfunktionerne $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_k x}$ lineært uafhængige.

[18] En omhyggelig læser har allerede gjort det, der står i parentes i eksempel 7.2.

Bevis: Vi fører beviset indirekte og antager, at der er lineær afhængighed. Så må en af eksponentialfunktionerne være en linearkombination af de foregående. Lad den m'te være den første, det sker for:

$$e^{r_m x} = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_{m-1} e^{r_{m-1} x}.$$

Dette skulle gerne føre til en modstrid. Vi differentierer:

$$r_m e^{r_m x} = c_1 r_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_{m-1} r_{m-1} e^{r_{m-1} x}.$$

Dernæst multiplicerer vi den første ligning med r_m og subtraherer den sidste fra den. Efter en smule omordning får vi

$$c_1(r_m - r_1)e^{r_1 x} + \cdots + c_{m-1}(r_m - r_{m-1})e^{r_{m-1} x} = 0.$$

Da $e^{r_m x}$ er antaget at være den første eksponentialfunktion, der er en funktion af de foregående eksponentialfunktioner, må disse være lineært uafhængige, altså er alle koefficienterne i ovenstående ligning nul:

$$c_1(r_m - r_1) = \cdots = c_{m-1}(r_m - r_{m-1}) = 0.$$

Da r_m er forskellig fra $r_1, \ldots, r_{m-1}$, må $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, hvoraf fås $e^{r_m x} = 0$ ved indsættelse i den førstnævnte ligning i beviset. Og det er jo klart en modstrid, så hermed er den lineære uafhængighed etableret. ■

Hvis det karakteristiske polynomium $p(r)$ har imaginære rødder, er der intet problem, hvis man er tilfreds med en kompleks løsning. Også sætning 7.4 gælder, da der intetsteds i beviset går noget galt, når der er tale om komplekse eksponentialfunktioner. (Koefficienterne bliver naturligvis komplekse.)

EKSEMPEL 7.5
Løs den komplekse differentialligning

$$y''' + y'' + 2iy' + 2iy = 0,$$

hvor løsningsrummet skal bestå af komplekse funktioner af en reel variabel.

Løsning: Det karakteristiske polynomium er

$$p(r) = r^3 + r^2 + 2ir + 2i.$$

Vi har allerede fundet rødderne $r = -1,\ 1 - i,\ -1 + i$ i eksempel 5.1. Derfor er løsningen

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{(1-i)x} + c_3 e^{(-1+i)x} \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}(\cos x - i \sin x) + c_3 e^{-x}(\cos x + i \sin x), \end{aligned}$$

hvor c_1, c_2 og c_3 er arbitrære *komplekse* konstanter. □

Ved mange anvendelser er koefficienterne i (27) reelle, og man er i sidste ende interesseret i reelle løsninger. Det er dog en stor fordel at kunne bruge komplekse tal i mellemregningerne. Da det karakteristiske polynomium har reelle koefficienter, kan vi benytte (19). Hvis $r = \alpha + i\beta$ er rod, gælder dette også den komplekst konjugerede $r = \alpha - i\beta$. Vi har dermed et todimensionalt underrum af løsningsrummet:

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= Ae^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + Be^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= (A+B)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(A-B)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned} \tag{30}$$

Vi kan nu vælge de arbitrære komplekse konstanter A og B, så $c_1 = A+B$ og $c_2 = i(A-B)$ bliver arbitrære reelle konstanter, nemlig $A = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)$, $B = \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)$. Herved får vi de reelle løsninger

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Altså har vi vist:

> Hvis en homogen lineær differentialligning med konstante reelle koefficienter har de imaginære rødder $\alpha \pm i\beta$ i det karakteristiske polynomium, så er der de to lineært uafhængige løsninger
>
> $$e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(31)

EKSEMPEL 7.6
Find den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$3\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Løsning: Det karakteristiske polynomium er

$$p(r) = 3r^3 - 7r^2 + 8r - 2.$$

Vi har i eksempel 5.3 fundet rødderne $r = \frac{1}{3}$, $1+i$ og $1-i$. Derfor er den fuldstændige reelle løsning

$$y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x,$$

hvor c_1, c_2 og c_3 er reelle arbitrære konstanter. □

EKSEMPEL 7.7
Find den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$y^{(4)} - 8y''' + 27y'' - 38y' + 26y = 0.$$

Løsning: Det karakteristiske polynomium er

$$p(r) = r^4 - 8r^3 + 27r^2 - 38r + 26.$$

Vi har i eksempel 5.4 fundet rødderne $r = 1 \pm i$, $3 \pm 2i$. Derfor er den fuldstændige reelle løsning

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 e^{3x} \cos 2x + c_4 e^{3x} \sin 2x. \qquad \square$$

Der er endnu en situation, vi mangler at behandle, nemlig multiple rødder i det karakteristiske polynomium. Så får vi ikke nok eksponentialfunktioner e^{rx} til at udspænde løsningsrummet. Vi får brug for en hjælpesætning:

HJÆLPESÆTNING 7.8
For differentialoperatoren $(D-r)^m$ gælder, at

$$(D-r)^m (x^j e^{rx}) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Bevis: Vi anvender først $D - r$ én gang:

$$\begin{aligned}(D-r)(x^j e^{rx}) &= \frac{d}{dx}(x^j e^{rx}) - rx^j e^{rx} \\ &= jx^{j-1}e^{rx} + rx^j e^{rx} - rx^j e^{rx} \\ &= jx^{j-1}e^{rx}.\end{aligned}$$

Da et polynomium $q(x)$ er linearkombination af sådanne x^j og $D - r$ er lineær, følger det, at hver gang man anvender $D - r$ på et udtryk af formen $q(x)e^{rx}$, går graden af polynomiet $q(x)$ én ned. Hvis $D - r$ anvendes flere gange end polynomiets grad, forsvinder polynomiet, og man får nul. ∎

EKSEMPEL 7.9
Løs differentialligningen

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

Løsning: Det karakteristiske polynomium

$$p(r) = r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$$

har den tredobbelte rod 2. Da $p(D) = (D-2)^3$, kan vi skrive differentialligningen på formen $(D-2)^3 y = 0$. Af hjælpesætningen ses, at e^{2x}, xe^{2x} og $x^2 e^{2x}$ er løsninger, og da de er lineært uafhængige (vis det!), får vi den fuldstændige løsning

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}. \qquad \square$$

Vi er nu i stand til at angive formen af den fuldstændige løsning for alle homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Ifølge algebraens fundamentalsætning (se side 26) kan det karakteristiske polynomium skrives

$$p(r) = a_n(r-\alpha_1)^{m_1}(r-\alpha_2)^{m_2}\dots(r-\alpha_k)^{m_k},$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ er *forskellige* rødder og $m_1, m_2, \dots, m_k$ er de tilsvarende multipliciteter. Der er nu afgørende, at rækkefølgen, vi nævner rødderne i, er ligegyldig. For en vilkårlig rod α med multiplicitet m kan vi skrive den sidst og får

$$p(r) = q(r)(r-\alpha)^m,$$

hvor $q(r)$ er et polynomium af grad $n-m$, der ikke har α som rod. For den tilsvarende differentialoperator har vi

$$p(D) = q(D)(D-\alpha)^m.$$

Da operatorer anvendes baglæns, ser vi, at hvis $(D-\alpha)^m y = 0$, så er også $p(D)y = q(D)0 = 0$. Vi kan derfor anvende hjælpesætningen og får, at for hver rod r med multiplicitet m er der løsningerne

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad x^2e^{rx}, \quad \dots, \quad x^{m-1}e^{rx}.$$

Hvis man sammenfatter disse løsninger for alle rødder, får man i alt n løsninger. Man kan vise, at de er lineært uafhængige,[19] så man får en basis for løsningsrummet. En eventuel overgang fra komplekse til reelle løsninger vil ikke volde noget problem for læsere, der ikke er stået af endnu.

EKSEMPEL 7.10
Løs differentialligningen

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0.$$

Løsning: For det karakteristiske polynomium fås

$$p(r) = r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = r^2(r-1)^3.$$

Da $r = 0$ er dobbeltrod og $r = 1$ tredobbelt rod, fås den fuldstændige løsning (husk, at $e^{0x} = 1$)

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x. \qquad \square$$

[19] Jeg kunne godt give et bevis her; men da den samlede score for teknisk værdi og kunstnerisk værdi er for lav, vil jeg undlade det.

EKSEMPEL 7.11
Løs differentialligningen

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 4y''' - 4y' - 4y = 0,$$

idet der oplyses, at $y = e^{-x}\sin x$ er løsning.

Løsning: Det karakteristiske polynomium er

$$p(r) = r^5 + 3r^4 + 4r^3 - 4r - 4.$$

Da $e^{-x}\sin x$ er den imaginære del af $e^{(-1+i)x}$, må $r = -1+i$, og dermed også $r = -1-i$, være rødder. Derfor går polynomiet

$$(r+1-i)(r+1+i) = (r+1)^2 + 1 = r^2 + 2r + 2$$

op i $p(r)$. Ved polynomiers division fås faktoriseringen

$$p(r) = (r-1)(r^2+2r+2)^2,$$

så den fuldstændige komplekse løsning er

$$y = Ae^x + Be^{(-1+i)x} + Ce^{(-1-i)x} + Dxe^{(-1+i)x} + Exe^{(-1-i)x}.$$

Når differentialligningen har reelle koefficienter, må det være et rimeligt krav, at vi angiver de reelle løsninger. Ved at behandle B og C, hhv. D og E, på samme måde som A og B i formel (30) – eller ved at sige, at for en kompleks løsning er både realdelen for sig og imaginærdelen for sig løsninger (hvorfor, det gælder jo ikke i eksempel 7.5?) – får vi den fuldstændige reelle løsning

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\sin x + c_4xe^{-x}\cos x + c_5xe^{-x}\sin x. \qquad \square$$

Vi kan også gå den anden vej og lade nogle løsninger være givet. Vi skal så konstruere differentialligningen. To eksempler illustrerer dette:

EKSEMPEL 7.12
Opstil en homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter af lavest mulig orden, der har løsningerne $y = e^x$ og $y = xe^{-x}$.

Løsning: I det karakteristiske polynomium må $r = 1$ være rod og $r = -1$ dobbeltrod, altså er

$$p(r) = (r-1)(r+1)^2 = r^3 + r^2 - r - 1.$$

Differentialligningen er

$$y''' + y'' - y' - y = 0. \qquad \square$$

EKSEMPEL 7.13
Opstil en homogen lineær differentialligning med *reelle* koefficienter af lavest mulig orden, der har løsningerne x^2e^x og $xe^{-x}\cos 2x$.

Løsning: $r = 1$ må være mindst tredobbelt rod i det karakteristiske polynomium. Da $xe^{(-1+2i)x}$ har den anden angivne løsning som realdel, må $r = -1+2i$ og $r = -1-2i$ være dobbeltrødder, hvorfor

$$(r+1-2i)(r+1+2i) = (r+1)^2+4 = r^2+2r+5$$

går to gange op. Det karakteristiske polynomium er

$$p(r) = (r-1)^3(r^2+2r+5)^2.$$

Derfor er differentialligningen af syvende orden:

$$(D-1)^3(D^2+2D+5)^2y = 0.$$

Hvis man orker det (eller har adgang til computer algebra), kan man multiplicere dette ud. Man får differentialligningen

$$y^{(7)}+y^{(6)}+5y^{(5)}-11y^{(4)}+3y'''-29y''+55y'-25y = 0. \qquad \square$$

En bestemt løsning i løsningsrummet kan specificeres vha. såkaldte *begyndelsesbetingelser*. Hvis differentialligningen er af orden n, er der n arbitrære konstanter, og deres værdier kan fastlægges ved

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}.$$

Ved indsættelse i udtrykket for y og dens afledede fås n lineære ligninger med n ubekendte. Man kan vise, at ligningssystemets matrix altid er ikke-singulær, så der er præcis én løsning.

EKSEMPEL 7.14
Løs begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{gathered} 3y'''-7y''+8y'-2y = 0, \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 3. \end{gathered}$$

Løsning: Differentialligningen er allerede løst i eksempel 7.6. Vi har

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{\frac{1}{3}x}+c_2e^x\cos x+c_3e^x\sin x, \\ y' &= \tfrac{1}{3}c_1e^{\frac{1}{3}x}+c_2e^x(\cos x-\sin x)+c_3e^x(\sin x+\cos x), \\ y'' &= \tfrac{1}{9}c_1e^{\frac{1}{3}x}-2c_2e^x\sin x+2c_3e^x\cos x. \end{aligned}$$

Ved indsættelse af begyndelsesbetingelserne fås

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \qquad\quad &= 10, \\ \tfrac{1}{3}c_1 + c_2 + \quad c_3 &= 5, \\ \tfrac{1}{9}c_1 \qquad\ + 2c_3 &= 3, \end{aligned}$$

med løsningen $c_1 = 9$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$. Derfor fås

$$y = 9e^{\frac{1}{3}x} + e^x(\cos x + \sin x).$$

□

Det skal til sidst nævnes, at da Newtons anden lov indeholder accelerationen, der er en andenafledet, optræder andenordens differentialligninger særdeles ofte ved fysiske og tekniske anvendelser. I bygningsstatikken beskrives bjælkers udbøjning ved fjerdeordens differentialligninger.

EKSEMPEL 7.15

Et lod med massen m hænger i en fjeder, hvis masse negligeres. En lodret y-akse indlægges. (Tegn!) Ifølge Newtons anden lov gælder for den samlede kraft F, som loddet påvirkes med, at $F = m\ddot{y}$.[20] Idet origo er anbragt i loddets hvilestilling, er der dermed kompenseret for tyngdekraften. Ifølge Hookes lov[21] bliver loddet trukket tilbage mod hvilestillingen med en kraft $-ky$. Endvidere antager vi, at loddet bremses med en kraft proportional med hastigheden, altså $-c\dot{y}$. Vi får derfor $F = -ky - c\dot{y}$, altså den homogene differentialligning

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0.$$

Af fysiske grunde er $m, c, k > 0$. Lad fx $m = 1\,\text{kg}$, $c = 2\,\text{kg/sek}$, $k = 65\,\text{kg/sek}^2 = 65\,\text{N/m}$. Da differentialligningen

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 65y = 0$$

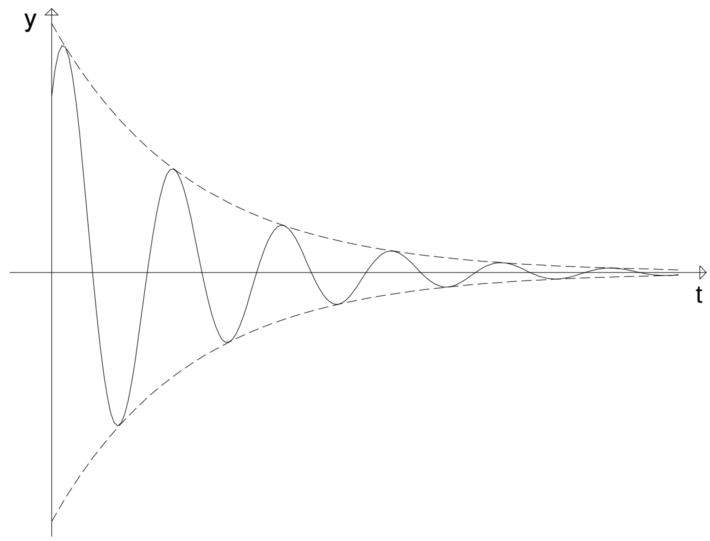
har karakteristisk polynomium $r^2 + 2r + 65$ med de komplekse rødder $-1 \pm 8i$, fås

$$y = c_1e^{-t}\cos 8t + c_2e^{-t}\sin 8t.$$

Antag, at loddet til tiden $t = 0$ trækkes ud i en afstand $1\,\text{m}$ og får et træk med

[20] Vi benytter fysikernes tradition (som stammer fra Newton) med at lade prikker over et symbol betegne differentiation mht. tiden.

[21] Robert Hooke (1635–1703). Som kurator for The Royal Society lavede han hver uge 3–4 *nye* demonstrationer af fysiske fænomener.



Figur 10: Dæmpet svingning

hastigheden $7\,\mathrm{m/sek}$, altså at begyndelsesbetingelserne er $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 7$. Vi får løsningen

$$y = e^{-t}(\cos 8t + \sin 8t).$$

Ved at opfatte parentesen som skalarprodukt mellem $(\cos 8t, \sin 8t)$ og $(1,1) = (\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)_{\mathrm{pol}}$, får vi

$$y = e^{-t} \cdot \sqrt{2}(\cos 8t \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin 8t \sin \tfrac{1}{4}\pi),$$

altså ifølge (3)

$$y = \sqrt{2}e^{-t} \cos(8t - \tfrac{1}{4}\pi).$$

Der er tale om en *dæmpet svingning* med eksponentielt aftagende amplitude $\sqrt{2}e^{-t}$ (se fig. 10).

OPGAVER

Angiv den fuldstændige løsning for følgende differentialligninger:

7.1. $y' = 2y$.

7.2. $ay' + by = 0$, a og b reelle konstanter.

7.3. $y'' + 7y' + 10y = 0$.

7.4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 7y = 0.$

7.5. $y'' + (1-i)y' - iy = 0.$

7.6. $\dfrac{d^2u}{dt^2} = 10\dfrac{du}{dt} - 21u;$

7.7. $y'' + 4y' + 5y = 0.$

7.8. $4y'' + 12y' + 9y = 0.$

7.9. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

7.10. $27y''' - 27y'' + 9y' - y = 0.$

7.11. $(D^3 + 8D^2 + 25D + 26)y = 0.$

7.12. $y''' - 13y'' + 55y' - 75y = 0.$

7.13. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ ($y = e^x \sin x$ er løsning).

7.14. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 28y' + 20y = 0.$

7.15. $(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)(4D^2 - 8D + 5)y = 0.$

Angiv en homogen differentialligning med reelle koefficienter, der har de angivne funktioner som løsninger:

7.16. $x.$

7.17. $\cos 3x.$

7.18. $e^x, e^{3x}.$

7.19. $e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{3}x.$

7.20. $2, x\cos x.$

Løs følgende begyndelsesværdiproblemer:

7.21. $y' = 2y, \quad y(1) = 2.$

7.22. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$

7.23. $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0.$

7.24. $y''' = 2y'', \quad y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = 4.$

7.25. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$

7.26. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) Den fuldstændige løsning til en differentialligning udgør et underrum af $\mathcal{F}$.

b) Den fuldstændige løsning til en lineær differentialligning udgør et underrum af $\mathcal{F}$.

c) Den fuldstændige løsning til en homogen lineær differentialligning udgør et underrum af $\mathcal{F}$.

d) For en homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter får man reelle løsninger ved at tage realdel og imaginærdel af de komplekse løsninger.

e) For en homogen lineær differentialligning med reelle koefficienter får man reelle løsninger ved at tage realdel og imaginærdel af de komplekse løsninger.

7.27. Gennemfør beviset for (28), idet $p(D)$ antages at være af formen $aD^2 + bD + c$.

7.28. Vis, at en n'teordens homogen lineær differentialligning

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

ved substitutionerne

$$y_0 = y, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

kan omdannes til n førsteordensligninger. Lad $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$. Vis, at hvis $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ skrives som en søjlevektor, så gælder der en matrixligning $\mathbf{y}' = a\mathbf{y}$. Find matricen A.

7.29. Antag i eksempel 7.15, at $m = 1\,\mathrm{kg}$ og $k = 65\,\mathrm{N/m}$ holdes fast. Hvor stor er den mindste værdi af c, for hvilken der ikke forekommer svingninger (*kritisk dæmpning*).

8 Inhomogene lineære differentialligninger

Ved en inhomogen lineær differentialligning af n'te orden forstås en differentialligning af formen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{32}$$

hvor $a_n \neq 0$ og $g = g(x)$ er en given funktion. Vi vil stadig antage, at $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er konstanter (reelle tal, når intet andet nævnes). Vha. differentialoperatoren

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{(n-1)} + \cdots + a_1 D + a_0,$$

som er indført på side 34, kan (32) kort skrives $p(D)y = g$. Vi vil kalde $g = g(x)$ *højresiden*, også selv om differentialligningen først skal omordnes lidt, for at den kan få formen (32). Et par eksempler belyser dette.

EKSEMPEL 8.1
Undersøg, om følgende fire differentialligninger kan skrives på formen (32)

$$\begin{aligned}
&y''' - \tfrac{13}{2}y' - \tfrac{1}{2}y'' = 3y,\\
&y'' + y^2 = e^x,\\
&y'' - 1 + 3y = 4y',\\
&4y' + e^{2x} - y'' - 3y = 0.
\end{aligned}$$

Løsning: Den første ligning kan omskrives til

$$y''' - \tfrac{1}{2}y'' - \tfrac{13}{2}y' - 3y = 0,$$

og er derfor homogen. (Faktisk er den nævnt i eksempel 7.1.) Den næste er ikke engang lineær, da den ubekendte funktion $y = y(x)$ forekommer kvadreret. De to sidstnævnte omformes til hhv.

$$y'' - 4y' + 3y = 1, \tag{33}$$
$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}. \tag{34}$$

og har derfor højresider hhv. 1 og e^{2x}. □

Vi skal nu se, at hvis man blot kender én løsning til (32), kan man let finde samtlige løsninger ved at løse den tilsvarende homogene ligning (27). Vi vil finde et udtryk for en vilkårlig løsning $y = y_{\text{inh}}(x)$ til den inhomogene ligning, altså for hvilken

$$p(D)y_{\text{inh}} = g.$$

Vi antager, at vi allerede har fundet en løsning $y = y_{\text{part}}(x)$, hvor vi kalder y_{part} en *partikulær løsning*.[22] Der gælder altså

$$p(D)y_{\text{part}} = g.$$

Da $p(D)$ er lineær, fås ved subtraktion

$$p(D)(y_{\text{inh}} - y_{\text{part}}) = 0.$$

[22] y_{part} er ikke finere end de andre; partikulær løsning betyder blot en eller anden løsning, som vi på en eller anden måde har fundet frem til.

Heraf ses, at $y_{\text{inh}} - y_{\text{part}}$ er løsning til den tilsvarende homogene ligning (27), der også kan skrives $p(D)y = 0$. Idet en vilkårlig løsning til (27) kaldes y_{hom}, kan vi derfor skrive $y_{\text{hom}} = y_{\text{inh}} - y_{\text{part}}$, altså

$$y_{\text{inh}} = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}}. \tag{35}$$

Vi har vist, at der ikke er andre løsninger til (32) end dem, der har formen (35). At der ikke i dette udtryk er falske løsninger, ser man ved at gøre prøve:

$$p(D)y_{\text{inh}} = p(D)y_{\text{part}} + p(D)y_{\text{hom}} = g + 0 = g.$$

Vi har dermed vist følgende fundamentale resultat:

Man får den fuldstændige løsning til en inhomogen lineær differentialligning ved til en partikulær løsning at addere den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

(36)

EKSEMPEL 8.2
Løs ligningerne (33) og (34).

Løsning: Da differentialkvotienten af en konstant er nul, ser man umiddelbart ved indsættelse, at (33) har en konstant partikulær løsning, nemlig $y = \frac{1}{3}$. Hvad angår (34), kunne man få den lyse idé, at der måske kunne være en løsning af formen $y = Ae^{2x}$, hvor A er en foreløbig ukendt konstant. Så kan man nemlig indsætte og se, om man kan få et sandt udsagn. Da $y' = 2Ae^{2x}$ og $y'' = 4Ae^{2x}$, får man

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = e^{2x},$$

der efter division med e^{2x} løses til $A = -1$, altså er $y = -e^{2x}$ en partikulær løsning. Den homogene ligning er i begge tilfælde $y'' - 4y' + 3y = 0$ med karakteristisk polynomium $r^2 - 4r + 3$, der har rødderne 1 og 3, så den homogene løsning[23] er

$$y_{\text{hom}} = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Derfor er den fuldstændige løsning til (33)

$$y = \tfrac{1}{3} + c_1 e^x + c_2 e^{3x},$$

og til (34)

$$y = -e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Læg i øvrigt mærke til, at hvis højresiden i (34) var e^x, skulle der mere snedighed til. Da $y = Ae^x$ uanset værdien af konstanten A er løsning til den homogene ligning, kan den ikke samtidig være løsning til den inhomogene ligning.[24] □

[23] Egentlig løsningen til den tilsvarende homogene ligning.

[24] Ved anden gennemlæsning ved du sikkert, hvad du så skal gøre, se opgave 0.6.

Når man som i ovenstående eksempel har samme homogene ligning og forskellige højresider, kan man danne nye inhomogene ligninger ved at kombinere højresiderne. Antag, at vi skal løse differentialligningen

$$p(D)y = a_1 g_1 + a_2 g_2, \tag{37}$$

hvor a_1 og a_2 er konstanter, og vi allerede kender partikulære løsninger, hvis højresiden er $g_1 = g_1(x)$ eller $g_2 = g_2(x)$. Lad nemlig $y = y_1(x)$ og $y = y_2(x)$ opfylde $p(D)y_1 = g_1$ og $p(D)y_2 = g_2$. Så er $y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ løsning til (37), idet der pga. lineariteten af $p(D)$ gælder

$$p(D)(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1\, p(D)y_1 + a_2\, p(D)y_2 = a_1 g_1 + a_2 g_2.$$

Vi har vist det såkaldte *superpositionsprincip*:

> Når man danner linearkombinationer af højresider, er løsningerne de tilsvarende linearkombinationer af de oprindelige løsninger.

(38)

EKSEMPEL 8.3
Løs differentialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 6 + 2e^{2x}.$$

Løsning: Fra eksempel 8.2 vides, at hvis højresiden var 1, ville $y = \frac{1}{3}$ være en partikulær løsning, og hvis højresiden var e^{2x}, ville $y = -e^{2x}$ være en partikulær løsning. Altså er nu

$$y = 6(\tfrac{1}{3}) + 2(-e^{2x}) = 2 - 2e^{2x}$$

en partikulær løsning. Derfor er ifølge (36) den fuldstændige løsning til den givne ligning

$$y = 2 - 2e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}.$$

□

Vi skal nu se på en systematisk metode til løsning af (32), når højresiden $g = g(x)$ er af en bestemt type, nemlig når g er løsning til en lineær *homogen* differentialligning med konstante koefficienter. Vi antager, at der er et polynomium $q(r)$, så der for den tilsvarende differentialoperator $q(D)$ gælder, at $q(D)g = 0$. Vi indfører *ad hoc*-begrebet *tilladt funktion* for sådanne funktioner g. Der er tale om eksponentialfunktioner e^{rx}, også for imaginære $r = \alpha + i\beta$, hvilket svarer til de reelle funktioner $e^{\alpha x}\cos\beta x$ og $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Sådanne funktioner kan være multiplicerede med x^j, hvor j er et ikke-negative helt tal, altså udtryk af formen

$$x^j e^{rx}, \quad x^j e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^j e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad j = 0, 1, \ldots$$

(Bemærk, at for $r = 0$ får man blot x^j.) Endvidere linearkombinationer af sådanne, hvilket dog også kan klares vha. (38). I eksemplerne 7.12 og 7.13 har vi set eksempler på, hvordan sådanne polynomier $q(r)$ kan konstrueres. Her er flere eksempler:

EKSEMPEL 8.4
Angiv for følgende funktioner $g = g(x)$ et polynomium $q = q(r)$ med reelle koefficienter, så $q(D)g = 0$: (a) $g_1(x) = e^{3x}$, (b) $g_2(x) = \cos 2x$, (c) $g_3(x) = xe^{-x}$, (d) $g_4(x) = x^2e^{-x}\sin 2x$, (e) $g_5(x) = \tan x$.

Løsning: I tilfælde (a) er $r = 3$, så $q_1(r) = r - 3$ (svarende til differentialligningen $y' - 3y = 0$). For (b) er $r = 2i$, så $q_2(r) = (r - 2i)(r + 2i) = r^2 + 4$. For (c) skal $r = -1$ være dobbeltrod, så $q_3(r) = (r + 1)^2$. For (d) skal $r = -1 + 2i$ være tredobbelt rod, så vi får sjettegradspolynomiet $q_4(r) = \{(r + 1 - 2i)(r + 1 + 2i)\}^3 = \{(r + 1)^2 + 4)\}^3$. (Bemærk, at vi ikke har spildt tiden på at gange polynomiet ud, da det væsentlige er rødderne og deres multiplicitet.) For (e) er der ikke tale om en tilladt funktion, så q_5 eksisterer ikke. □

For tilladte højresider $g = g(x)$ kan vi i kortfattet notation formulere problemet således:

$$\boxed{\text{Find} \quad y \quad \text{i} \quad p(D)y = g, \quad \text{hvor} \quad q(D)g = 0.}$$

Vi vil anvende differentialoperatoren $q(D)$ på begge sider af den inhomogene ligning. Vi får

$$q(D)p(D)y = q(D)g = 0,$$

hvorfor $y = y(x)$ er løsning til den *homogene* ligning

$$q(D)p(D)y = 0. \tag{39}$$

Vi har altså

$$p(D)y = g \quad \Rightarrow \quad q(D)p(D)y = 0,$$

men implikationspilen går ikke den anden vej, så (39) indeholder falske løsninger til $p(D)y = 0$ Faktisk indeholder (39) både løsningerne til den homogene ligning $p(D)y = 0$, løsninger til den inhomogene ligning $p(D)y = g$ og falske løsninger.[25] Men da alle løsninger til (39) er med, kan vi ved at gøre prøve finde, hvad de arbitrære konstanter i løsningsudtrykket for (39) skal være. Vi illustrerer med en række eksempler.

[25]Man kunne kalde (39) revl og krat-ligningen!

EKSEMPEL 8.5
Angiv den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' + y' - 2y = 12e^{2x}.$$

Løsning: Da $p(r) = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$ og $q(r) = r - 2$, har polynomiet $q(r)p(r)$ rødderne 1, -2 og 2, så $q(D)p(D)y = 0$ har løsningen

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}.$$

Da $y_{\text{hom}} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, prøver vi med $y_{\text{part}} = Ae^{2x}$. Ved indsættelse fås

$$\begin{aligned}(D^2 + D - 2)(Ae^{2x}) &= 12e^{2x},\\ A \cdot (2^2 + 2 - 2)e^{2x} &= 12e^{2x},\end{aligned}$$

hvorfor $A = 3$, så $y_{\text{part}} = 3e^{2x}$. Ifølge (36) er den fuldstændige løsning

$$y = 3e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}. \qquad \square$$

EKSEMPEL 8.6
Løs differentialligningen

$$y'' - 2y' + y = 10\,e^{-2x}\cos x.$$

Løsning: Vi har $p(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, og da $e^{-2x}\cos x$ er den reelle del af $e^{(-2+i)x}$, og $q(r)$ skal have reelle koefficienter, er

$$q(r) = (r + 2 - i)(r + 2 + i) = (r+2)^2 + 1.$$

Det er ikke nødvendigt at reducere udtrykket for $q(r)$, og det ville være spildt arbejde at gange fjerdegradspolynomiet

$$q(r)p(r) = \{(r+1)^2 + 1\}\,(r-1)^2$$

ud, da vi blot benytter, at $r = 1$ er dobbeltrod og $r = -1 \pm i$ er komplekst konjugerede rødder. Løsningen til differentialligningen skal findes blandt

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}\cos x + c_4 e^{-2x}\sin x,$$

og da de to første led giver den homogene løsning, kan vi opstille følgende regneskema for en partikulær løsning[26]

[26]Erfaringen viser, at nogle studerende har vanskeligheder med sådanne differentiationer. Læg et stykke papir over udtrykkene for y' og y'', og beregn dem selv. Brug den tid, der er nødvendig for at få det lært.

$$\begin{array}{lll|r} y &= & A e^{-2x} \cos x + \qquad\quad B e^{-2x} \sin x & 1 \\ y' &= (-2A+B)\, e^{-2x} \cos x + (-A-2B)\, e^{-2x} \sin x & & -2 \\ y'' &= \ (3A-4B)\, e^{-2x} \cos x + \ (4A+3B)\, e^{-2x} \sin x & & 1 \end{array}$$

hvor vi har sorteret leddene i udtrykkene for y' og y'', og hvor tallene til højre for stregen angiver, hvilken linearkombination der giver venstresiden af differentialligningen. Derfor fås ved indsættelse

$$(8A-6B)\, e^{-2x} \cos x + (6A+8B)\, e^{-2x} \sin x = 10\, e^{-2x} \cos x,$$

som giver ligningssystemet

$$8A-6B = 10, \quad 6A+8B = 0,$$

med løsningen $A = \frac{4}{5}$, $B = -\frac{3}{5}$. En partikulær løsning er

$$y_{\text{part}} = \tfrac{4}{5} e^{-2x} \cos x - \tfrac{3}{5} e^{-2x} \sin x,$$

og den fuldstændige løsning er

$$y = \tfrac{4}{5} e^{-2x} \cos x - \tfrac{3}{5} e^{-2x} \sin x + c_1 e^x + c_2 x e^x. \qquad \square$$

Ud fra disse to eksempler kunne man tro, at man ikke behøver at spekulere på, hvad $q(r)$ er, og blot "gætte" på en partikulær løsning, der "ligner" højresiden, altså $y_{\text{part}} = Ae^{2x}$ i eksempel 8.5 og $y_{\text{part}} = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$ i eksempel 8.6, idet man husker at få både cosinus og sinus med i det sidste tilfælde. Der er dog problemer med multiple rødder, navnlig når der er fælles rødder i $p(r)$ og $q(r)$, som de følgende to eksempler viser.

EKSEMPEL 8.7
Løs differentialligningen

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}.$$

Løsning: Det kunne være fristende at prøve med $y_{\text{part}} = Ae^{3x}$; men det er dømt til at mislykkes. Idet $p(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$, er

$$y_{\text{hom}} = c_1\, e^{3x} + c_2\, x e^{3x},$$

og en funktion kan ikke samtidigt være løsning til den homogene og den inhomogene ligning. Heller ikke $y_{\text{part}} = Axe^{3x}$ duer af samme grund. Et inspireret gæt er $y_{\text{part}} = Ax^2 e^{3x}$. Lad os argumentere for, at vi kan være sikker på, at det giver resultat: Da $p(r) = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$ og $q(r) = r - 3$, er $r = 3$ tredobbelt rod i $q(r)p(r)$. Derfor må løsningerne søges blandt

$$c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + c_3 x^2 e^{3x},$$

og de to første led udgør den homogene løsning. Derfor må $c_3 \neq 0$ i en partikulær løsning, og vi får derfor ved at trække den homogene del fra, se (36), også en partikulær løsning af formen $y_{\text{part}} = Ax^2 e^{3x}$. Vi får regneskemaet

$$\begin{array}{rl|r} y = & Ax^2 e^{3x} & 9 \\ y' = & A(3x^2+2x)e^{3x} & -6 \\ y'' = & A(9x^2+12x+2)e^{3x} & 1 \end{array}$$

I linearkombinationen angivet til højre for stregen forsvinder leddene med xe^{3x} og $x^2 e^{3x}$, så vi får

$$2Ae^{3x} = 4e^{3x}.$$

Vi har $A = 2$, så $y_{\text{part}} = 2x^2 e^{3x}$, og dermed er den fuldstændige løsning

$$y = 2x^2 e^{3x} + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}. \qquad \square$$

EKSEMPEL 8.8
Løs differentialligningen

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

Løsning: Vi har $p(r) = r^2 + 4$, og da højresiden er den imaginære del af e^{2ix}, er også $q(r) = r^2 + 4$. Vi får vha. $q(D)p(D)y = 0$, at løsningerne er blandt

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x,$$

hvoraf de to første led giver den homogene løsning, så vi altså for den partikulære løsning skal multiplicere differentialligningens højreside med x og huske at få cosinus med. Vi får regneskemaet

$$\begin{array}{rcr|l} y & = & Ax\cos 2x + \ Bx\sin 2x & 4 \\ y' & = & A\cos 2x + \ B\sin 2x + 2Bx\cos 2x - 2Ax\sin 2x & 0 \\ y'' & = & 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x & 1 \end{array}$$

og dermed

$$B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x,$$

så $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$. Hermed er $y_{\text{part}} = -\frac{1}{4}x\cos 2x$, så den fuldstændige løsning er

$$y = -\tfrac{1}{4}x\cos 2x + c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Dette eksempel kan også løses komplekst, se opgave 0.18. $\square$

De bemærkninger, der står på side 42 om begyndelsesbetingelser, gælder uforandrede for inhomogene differentialligninger. Vi illustrerer med et eksempel.

EKSEMPEL 8.9
Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y'' + 3y' + 2y = 24xe^{2x},$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Løsning: Idet $p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$ og $q(r) = (r-2)^2$, ser man, at

$$y_{\text{hom}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x},$$

og at der må være en partikulær løsning af formen

$$y_{\text{part}} = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Ved indsættelse får man $A = -1$, $B = 2$, så den fuldstændige løsning bliver

$$y = -e^{2x} + 2xe^{2x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Ved differentiation fås

$$y' = 4xe^{2x} - c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}.$$

Vi indsætter $x = 0$ i de to udtryk og får

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad -c_1 - 2c_2 = -1,$$

hvoraf $c_1 = 3$, $c_2 = -1$. Derfor er den søgte løsning

$$y = -e^{2x} + 2xe^{2x} + 3e^{-x} - e^{-2x}. \qquad \square$$

OPGAVER

8.1. Angiv for følgende funktioner g et reelt polynomium q, så $q(D)g = 0$. (a) e^{-4x}, (b) $\sin 3x$, (c) $x^2 e^{3x}$, (d) $e^{2x}\cos 2x$, (e) $x^7 e^{2x} \sin 2x$, (f) $\sin x \cos x$, (g) $\cos^2 x$, (h) $\sin(x^2)$.

Angiv den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger:

8.2. $y' + 4y = e^{4x}$.

8.3. $y' + 4y = e^{-4x}$.

8.4. $y' + 4y = \frac{1}{2}(e^{4x} + e^{-4x})$. (Vink: Løs først opg. 0.2 og 0.3.)

8.5. $y'' - 7y' + 12y = 2e^{2x}$.

8.6. $y'' - 4y' + 3y = e^{x}$.

8.7. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 3x + 1$.

8.8. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$.

8.9. $y'' - 7y' + 12y = 150 \sin 3x$.

8.10. $y' + 2y = 25 x \cos x$.

8.11. $y'' - 2y' + 2y = 25 x \sin x$.

8.12. $y'' - 2y' = -4x^2$.

8.13. $y' + 2y = 10 \sin^2 x$.

Løs følgende begyndelsesværdiproblemer;

8.14. $y' - y = -2 \sin x, \quad y(\pi) = -1$.

8.15. $y'' - 4y' + 3y = e^{x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

8.16. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x} \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$.

8.17. *Markér hvert af de følgende udsagn som Sandt eller Falsk:*

a) Når man har løst differentialligningen $q(D)p(D)y = 0$, så kan man umiddelbart angive løsningen til differentialligningen $p(D)y = g$.

b) Løsning af differentialligningen $q(D)p(D)y = 0$ kan benyttes til at løse differentialligningen $p(D)y = g$.

c) Metoden i dette afsnit kan altid bruges til at løse en differentialligning af formen $p(D)y = g$.

d) Ud fra løsninger til $p(D)y = g_1$ og til $p(D)y = g_2$ kan man let konstruere løsninger til $p(D)y = g_1 g_2$.

e) Ud fra løsninger til $p(D)y = g_1$ og til $p(D)y = g_2$ kan man let konstruere løsninger til $p(D)y = g_1 + g_2$.

8.18. Løs eksempel 8.8 vha. den komplekse eksponentialfunktion. (Vink: Højresiden er den imaginære del af e^{2ix}. Prøv med $y_{\text{part}} = Axe^{2ix}$, hvor A er en *kompleks* arbitrær konstant.)

8.19. Antag, at $r = r_0$ ikke er rod i polynomiet $p(r)$. Vis, at differentialligningen $p(D)y = e^{r_0 x}$ har $y = e^{r_0 x}/p(r_0)$ som en partikulær løsning.

8.20. Antag, at $r = r_0$ er en simpel rod i polynomiet $p(r)$. Vis, at differentialligningen $p(D)y = e^{r_0 x}$ har $y = xe^{r_0 x}/p'(r_0)$ som en partikulær løsning. (Vink: Lad $p(D) = q(D)(D - r_0)$.)

8.21. Vis, at $y' + ay = g(x)$ har $y = e^{-ax}\int e^{ax}g(x)\,dx$ som en partikulær løsning.

8.22. (Fortsættelse.) Angiv for $x > 0$ den fuldstændige løsning til

$$y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

8.23. (Fortsættelse.) Angiv den fuldstændige løsning til

$$y' + y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

FACITLISTE

1.1: a: $(1, -\frac{1}{2}\pi)_{\text{pol}}$, b: $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)_{\text{pol}}$, c: $(2, -\frac{1}{6}\pi)_{\text{pol}}$, d: $(2\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\pi)$, e: $(2\sqrt{2}, \frac{5}{6}\pi)_{\text{pol}}$. **1.2**: a+d, b+g, e+j, f+i, c, h. **1.3**: $x = 3$. **1.4**: $y = 1$. **1.5**: Cirklen $x^2 + y^2 = 2y$. **1.6**: $y = \pm x$. **1.7**: $y = \frac{1}{2}e^x$. **1.8**: $(0,1)$, $(0,-1)$. **1.9**: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. **1.10**: $(0,0)$, $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{3}{4})$. **1.12**: Fx $r = |\cos 6\theta|$. **1.13**: FFSFS. **1.14**: Ellipse. **1.15**: Parablen $y^2 = 1 - 2x$. **1.19**: $r = \sqrt{2\cos 2\theta}$. **1.20**: $r = a(e^2 - 1)/(1 + e\cos\theta)$, $-\alpha < \theta < \alpha$, hvor $\cos\alpha = -1/e$. **1.21**: 2 for $0 \le a \le \frac{1}{2}$, 4 for $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 3 for $a = 1$. **1.22**: Kun ca. $\frac{3}{4}$ vinding!

2.1: $-2 + 6i$. **2.2**: $-17 + 7i$. **2.3**: $-i$. **2.4**: 50 (brug $z\bar{z} = |z|^2$). **2.5**: $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$. **2.6**: $-1 + 5i$. **2.7**: 1. **2.8**: $\frac{2}{5}\sqrt{6} - \frac{1}{5}i$. **2.9**: Enhedscirkelskiven i den komplekse plan. **2.10**: Samme udprikket. **2.11**: Punkter uden for cirklen med centrum $2i$ og radius 2. **2.12**: Den reelle akse. **2.13**: do. **2.14**: Linien gennem origo med hældning 45^o. **2.15**: FSFSS.

3.1: a: $(1, -\frac{1}{2}\pi)_{\text{pol}}$, b: $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)_{\text{pol}}$, c: $(2, -\frac{1}{6}\pi)_{\text{pol}}$, d: $(2\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\pi)_{\text{pol}}$, e: $(2\sqrt{2}, \frac{5}{6}\pi)_{\text{pol}}$. **3.2**: a: $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, b: 0, c: -5, d: $-1 + i$, e: $-1 - i\sqrt{3}$. **3.3**: $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)$ (alle fire). **3.4**: $\pm(\sqrt{3} + i)$, $\pm(1 - i\sqrt{3})$. **3.5**: 2, $1 + i$, 0, $1 - i$ (sæt $w = z - 1$). **3.6**: -3, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$. **3.7**: $(1, 100 \cdot \frac{1}{6}\pi)_{\text{pol}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\pi$. **3.8**: -1024. **3.9**: FSFSS.

3.10: $|z| = 1$. **3.11**: Sektorerne $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ og $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$. **3.12**: $\frac{1}{6}\pi < \theta < \frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$. **3.13**: $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

4.1: $2 - 2i$, $-2 + 2i$. **4.2**: $9 + i$, $-9 - i$. **4.3**: $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$. **4.4**: $1 + 2i$, $1 - 2i$. **4.5**: 1, i. **4.6**: c, ic. **4.7**: $3 + 2i$, $-1 + 3i$. **4.8**: $2\sqrt{3} - i$, $\sqrt{3} + i$. **4.9**: FSFFS. **4.10**: 2, -2, i, $-i$. **4.11**: 0, $1 + i$, $1 - i$. **4.12**: ± 1, $\pm i$, $\pm 1 \pm i$ (otte i alt). **4.13**: 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $-2i$, $\pm\sqrt{3} + i$. **4.14**: To værdier af $\sqrt{-1}$ sammenblandes.

5.1: 0, i, $-i$. **5.2**: -1, $2 \pm i\sqrt{3}$. **5.3**: 1, 2, $\pm i$. **5.4**: ± 1, $\pm i$, $\pm 1 \pm i$. **5.5**: $\pm\frac{1}{2}i$, $\pm 1 \pm i$. **5.6**: $2i$, $\pm\sqrt{3} - i$, 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. **5.7**: i, $\pm 1 + i$. **5.8**: -3, $2 + 3i$, $2 + 5i$. **5.9**: $2 \pm i$, $4 \pm 3i$. **5.10**: $2 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i$. **5.11**: FFSFS. **5.13**: $z^6 - z^4 + 4z^2 - 4$ (og andre).

6.1: $-\sin t + i/t$. **6.2**: $3(e^t - 2it)^2(e^t - 2i)$. **6.3**: $e^{it}(-\sin t + i\cos t)$. **6.4**: $5\exp\{(2+i)t\}$. **6.5**: SSSFS. **6.6**: $e^{i\alpha}$. **6.9**: Benyt produktreglen på $f = (f/g) \cdot g$.

7.1: ce^{2x}. **7.2**: $ce^{-(b/a)x}$. **7.3**: $c_1e^{-2x} + c_2e^{-5x}$. **7.4**: $c_1e^{(3+\sqrt{2})x} + c_2e^{(3-\sqrt{2})x}$. **7.5**: $c_1e^{-x} + c_2e^{ix}$, hvor c_1 og c_2 er komplekse. **7.6**: $u = c_1e^{3t} + c_2e^{7t}$. **7.7**: $c_1e^{-2x}\cos x + c_2e^{-2x}\sin x$. **7.8**: $c_1e^{-\frac{3}{2}x} + c_2xe^{-\frac{3}{2}x}$. **7.9**: $c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$. **7.10**: $c_1e^{\frac{1}{3}x} + c_2xe^{\frac{1}{3}x} + c_3x^2e^{\frac{1}{3}x}$. **7.11**: $c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}\cos 2x + c_3e^{-3x}\sin 2x$. **7.12**: $c_1e^{3x} + c_2e^{5x} + c_3xe^{5x}$. **7.13**: $c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x + c_3xe^x\cos x + c_4xe^x\sin x$. **7.14**: $c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3e^{-x}\cos 2x + c_4e^{-x}\sin 2x$. **7.15**: $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3xe^{2x} + c_4e^x\cos\frac{1}{2}x + c_5e^x\sin\frac{1}{2}x$. **7.16**: $y'' = 0$. **7.17**: $y'' + 9y = 0$. **7.18**: $y'' - 4y' + 3y = 0$. **7.19**: $36y'' + 36y' + 13y = 0$. **7.20**: $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$. **7.21**: $2e^{2(x-1)}$. **7.22**: $7e^{-2x} - 5e^{-3x}$. **7.23**: $2e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$. **7.24**: $1 + x + e^{2x}$. **7.25**: $e^x(x^2 - x + 1)$. **7.26**: FFSFS. **7.29**: $c = 16.1$ kg/sek.

8.1: (a) $r + 4$, (b) $r^2 + 9$, (c) $(r-3)^2$, (d) $r^2 - 4r + 8$, (e) $(r^2 - 4r + 8)^8$, (f) $r^2 + 4$, (g) $r(r^2+4)$, (h) Ingen løsning. **8.2**: $\frac{1}{8}e^{4x} + ce^{-4x}$. **8.3**: $xe^{-4x} + ce^{-4x}$. **8.4**: $\frac{1}{16}e^{4x} + \frac{1}{2}xe^{-4x} + ce^{-4x}$. **8.5**: $e^{2x} + c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$. **8.6**: $-\frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{3x}$. **8.7**: $\frac{1}{2}x^2 + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$. **8.8**: $\frac{1}{6}x^3e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$. **8.9**: $7\cos 3x + \sin 3x + c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$. **8.10**: $10x\cos x + 5x\sin x - 3\cos x - 4\sin x + ce^{-2x}$. **8.11**: $10x\cos x + 5x\sin x + 14\cos x + 2\sin x + c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$. **8.12**: $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x + c_1 + c_2e^{2x}$. **8.13**: $\frac{5}{2} - \frac{5}{4}\cos 2x - \frac{5}{4}\sin 2x + ce^{-2x}$. **8.14**: $\cos x + \sin x$. **8.15**: $-\frac{1}{2}xe^x + \frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{3x}$. **8.16**: $-e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x + e^x$. **8.17**: FSFFS. **8.22**: $e^x\ln x + ce^x$. **8.23**: $e^{-x}\ln(e^x + 1) + ce^{-x}$.