

Kursusgang M14, 9. december 2010, 12:30–16.15

Jeg refererer til seneste version af noterne som [AJ-v5].

Dagens program

1. 12:30–14:00 i A309. Jeg gennemgår resten af afsnit 7 i [AJ-v5]. Det omhandler systemer af første ordens differensligninger. Vægten er på Putzers algoritme og eksempler på anvendelse af denne.
2. 14:00–16:15 i grupperum. Regn opgaverne på nedenstående liste. Under gruppearbejdet besvarer jeg også spørgsmål vedr. kurset og tidligere opgaver.

Opgaver

1. Gennemlæs sidste del af afsnit 7 i [AJ-v5].
2. Der er givet et første ordens system på vektor-matrix form

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n).$$

Vi antager, at A kan diagonaliseres, dvs. der findes en diagonalmatrix

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

og en invertibel matrix P , således at

$$A = PDP^{-1}.$$

Definér en ny følge $\mathbf{y}$ ved $\mathbf{y}(n) = P^{-1}\mathbf{x}(n)$. Vis at denne følge opfylder differensligningen

$$\mathbf{y}(n+1) = D\mathbf{y}(n).$$

Skrevet som system er det

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n), \\ y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n). \end{aligned}$$

Man siger, at systemet er afkoblet. Det betyder, at det er omskrevet til to første ordens systemer, der ikke er koblede, og derfor kan løses hver for sig.

Start med at overveje ovenstående. Anvend dernæst overvejelserne på følgende konkrete matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Gennemfør diagonaliseringen af denne matrix, dvs find egenverdier og tilhørende egenvektorer, og opskriv D og P .

For det konkrete system bestemt ved denne matrix A givet i (1) gennemføres alle udregningerne, og man finder til sidst løsningen til systemet som

$$\mathbf{x}(n) = P\mathbf{y}(n).$$

Det betyder, at man løser det afkoblede system og transformerer om til den oprindelige variabel.

3. Løs nu det samme system med den konkrete matrix A givet i (1) ved hjælp af Putzers algoritme. Sammenlign derefter de to løsninger.
4. Brug Putzers algoritme til at bestemme potenserne A^n af nedenstående matricer

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

5. Brug Putzers algoritme til at bestemme potenserne A^n af nedenstående matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bemærk, at i dette tilfælde er egenverdierne komplekse. For at beregne potenser af egenverdierne kan man omskrive dem på polær form.

6. I denne opgave arbejder vi lidt videre med sammenhængen mellem en homogen anden ordens differensligning og det tilhørende system af første ordens ligninger. Anden ordens ligningen er givet som

$$x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0. \quad (2)$$

Det tilhørende system er i variablene

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), \\ x_2(n) &= x(n+1), \end{aligned}$$

og er givet ved

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \quad \text{hvor} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Her er

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{bmatrix}$$

præcis som i noterne.

Vi skal nu se på *to løsninger* til anden ordens ligningen (2) og forbindelsen med de tilhørende løsninger til første ordens systemet. Notationen er, at vi betegner de to løsninger med henholdsvis $x(n)$ og $y(n)$. De tilhørende vektorløsninger til første ordens systemet (3) betegnes med henholdsvis $\mathbf{x}(n)$ og $\mathbf{y}(n)$. Som i noterne er

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \end{bmatrix}.$$

Vi definerer en matrix følge

$$\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(n) \quad \mathbf{y}(n)] = \begin{bmatrix} x(n) & y(n) \\ x(n+1) & y(n+1) \end{bmatrix}.$$

Vis, at der gælder

$$\mathbf{X}(n+1) = A\mathbf{X}(n).$$

Husk på hvordan matrixmultiplikation virker. Observér, at Casorati determinanten for de to løsninger $x(n)$ og $y(n)$ kan skrives som

$$W(n) = \det \mathbf{X}(n).$$

Brug sammenhængen mellem matrixmultiplikation og determinanter til at vise, at

$$W(n+1) = cW(n),$$

og dermed, at

$$W(n) = c^n W(0).$$

Sammenlign dette resultat med Lemma 5.5 i noterne.

Overvej, at vi med ovenstående har vist, at to løsninger $\mathbf{x}(n)$ og $\mathbf{y}(n)$ til systemet (3) leder til to lineært uafhængige løsninger til anden ordens ligningen (2), hvis og kun hvis begyndelsesdata $\mathbf{x}(0)$ og $\mathbf{y}(0)$ er lineært uafhængige vektorer i $\mathbf{R}^2$.

Arne Jensen