Kursusgang S1, 21. oktober 2010, 12:30–16.15 Nedenfor refererer [AJ-v2] til version 2 af forelæsningsnoterne, som findes på kursets hjemmesider.

Introduktion Dette er den først selvstudium kursusgang i kurset. Disse kursusgange er indført for at sikre en tilstrækkelig fordybelse i pensum, og for at der er en veldefineret komponent af selvstudium i uddannelsesforløbet.

Jeg bruge disse kursusgange til dels at give Jer en ekstra chance for at få læst pensum, og dels få regnet nogle flere opgaver, inklusive opgaver der berører anvendelser.

Anbefalet program

1. Læs afsnit 2 og 3 i noterne [AJ-v2] (igen). Disse noter er skrevet *meget koncentreret*, så det er nødvendigt at læse dem mange gange. Specielt efter opgaveregningen, hvor I har brugt nogle af resultaterne.

2. Læs afsnit 7.1, siderne 489–491 i [SIF] grundigt. Det er specielt Theorem 7.1, der er vigtigt. Det konkrete vektorrum, som vi bruger i begyndelsen af afsnit 4 i [AJ-v2] er rummet $\mathsf{S}(\mathbf{N}_0)$. I [SIF] er det rummet, der betegnes med $\mathcal{F}(S)$; mængden S er her $\mathbf{N}_0$, altså rummet $\mathcal{F}(S)$ er alle reelle funktioner fra $\mathbf{N}_0$ til $\mathbf{R}$.

3. Regn eventuelle manglende opgaver fra Kursusgang 3.

4. Regn nedenstående opgaver, som er meget simple anvendelser af resultaterne fra afsnit 3 i [AJ-v2], specielt Example 3.3. De fleste af opgaverne kræver brug af lommeregner eller computer, for at finde svarene.

Opgaver vedrørende økonomi Vi ser på følgende problem. Det drejer sig om lån og tilbagebetaling af lån. Vi ser på modellen, hvor det oprindelige lån er på beløbet $q(0)$. Den årlige rentesats er $100r\%$. Det betyder, at hvis den årlige rente er 4%, så er $r = 0.04$ (bemærk, at jeg anvender decimal-punktum og ikke decimal-komma. Afdraget er konstant p per år. Restgælden efter n afdrag er $q(n)$. Differensligningen for dette tilfælde er, se Example 3.3,

$$q(n+1) = (1+r)q(n) - p.$$

Som angivet er løsningen

$$q(n) = (1+r)^n q(0) - \big((1+r)^n - 1\big)\frac{p}{r}.$$

Af denne formel følger en række andre formler. Tilbagebetaling med N afdrag giver, at afdragene så skal have størrelsen

$$p = q(0)\frac{r}{1-(1+r)^{-N}}.$$

Hvis man skal betale lånet tilbage med N afdrag, hvert på beløbet p, så kan man låne

$$q(0) = \big(1-(1+r)^{-N}\big)\frac{p}{r}.$$

Hvis man låner $q(0)$, med afdrag på p, så er tilbagebetalingsperioden lig med

$$N = -\frac{\log\Big(1 - \dfrac{rq(0)}{p}\Big)}{\log(1+r)}.$$

1. Start med at gennemlæse og *forstå* ovenstående. Hvor kommer formlerne fra? Hvordan er de udledt?

2. Som led i forståelsen af formlerne skal I indse, at for eksempel fordobling af lån og samtidig fordobling af afdrag, ved en uændret rentesats gør, at tilbagebetalingsperioden ikke ændres.

3. En person optager et realkreditlån på 1 mio. kroner, som skal tilbagebetales over 30 år. Hvor stort er det årlige afdrag ved rentesatserne 3%, 4%, 5%, 6%, 7%? Hvor meget er der i hvert tilfælde totalt (efter 30 år) betalt i rente, i hvert af tilfældene?

4. En person optager et forbrugslån på 10000kr., som skal tilbagebetales i løbet af 3 år. Hvor stort skal det samlede årlige afdrag være ved rentesatserne 7%, 10%, 15% og 18%? Hvor meget er betalt i rente totalt over de 3 år i hvert tilfælde?

   Hvor meget kan man maksimalt låne i hvert af de fire tilfælde, hvis man maksimalt kan tilbagebetale 3500kr. om året?

5. Vis, at hvis man optager et lån $q(0)$ til en rentesats $100r\%$ og betaler afdrag p, så gælder, at hvis $p \leq rq(0)$, så vil man aldrig betale hele lånet tilbage. Udled dette resultat både ved at bruge formlerne, og ved et argument baseret på almindelig sund fornuft.

6. Dette spørgsmål kræver, at man selv udleder en formel. Hvis man låner 20000kr., som skal betales tilbage over 5 år, og man betaler 4500kr. om året, hvad er den højest mulige rentesats, hvor dette kan lade sig gøre?

Arne Jensen