Første studieår
Introduktion til matematiske metoder

Prøveeksamen

december 2010
matematik studiet

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 4 \cdot 2^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 5, \quad x(1) = 1.$$

(e) Vis, at $x_{\mathrm{p}}(n) = n + 1$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5. \tag{2}$$

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5 + 4 \cdot 2^n. \tag{3}$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = \frac{1}{n+1}$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = \frac{n+1}{n+2}x(n).$$

Findes der andre løsninger til denne differensligning?

(b) Der er givet to følger

$$x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n.$$

Bestem koefficienterne b og c i differensligningen $x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$, således at begge følger er løsninger til denne differensligning.

(c) Vis, at de tre følger i denne opgave,

$$x(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n$$

er lineært uafhængige følger.

Opgave 3. (a) Løs følgende problem grafisk

$$\begin{aligned}
&\underset{y_1,y_2}{\text{Minimér}}\ y_1+2y_2\\
&\text{u.b.b.:}\\
&\ y_1+6y_2\geq 15,\\
&\ y_1+y_2\geq 5,\\
&-y_1+y_2\geq -5,\\
&\ y_1\geq 0, y_2\geq 0
\end{aligned}$$

(b) Opstil det duale problem og løs det vha. simplexmetoden.

(c) Hvad sker der med den optimale duale løsning, hvis bibetingelsen $y_1 + 6y_2 \geq 15$ ændres til $y_1 + 6y_2 \geq 15.1$?

(d) Betragt problemet

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ x_1+3x_2+5\\
&\text{u.b.b.:}\\
&\ x_1+2x_2\leq 6,\\
&\ x_1^2\leq 4,\\
&\ x_1\geq 0, x_2\geq 0
\end{aligned}$$

To aspekter ved dette problem skiller sig ud fra et sædvanligt LP problem. Hvilke?

(e) Find løsningen til problemet ved at løse et tilsvarende LP-problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= 4x_1(n)+2x_2(n),\\
x_2(n+1) &= -x_1(n)+x_2(n).
\end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.

(b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n \geq 1$.

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 4$ og $x_2(0) = -1$.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= 4x_1(n)+2x_2(n)+2,\\
x_2(n+1) &= -x_1(n)+x_2(n)+3.
\end{aligned}$$

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \tag{4}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta). \tag{7}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \tag{9}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \tag{11}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \tag{12}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta). \tag{13}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta). \tag{14}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \tag{15}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \tag{16}$$