

Første studieår
Introduktion til matematiske metoder i økonomi

Prøveeksamen
december 2010
matematik-økonomi studiet

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 4 \cdot 2^n. \quad (1)$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.
- (b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).
- (c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).
- (d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 5, \quad x(1) = 1.$$

- (e) Vis, at $x_p(n) = n + 1$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5. \quad (2)$$

- (f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5 + 4 \cdot 2^n. \quad (3)$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

- (a) Vis, at

$$x(n) = \frac{1}{n+1}$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = \frac{n+1}{n+2}x(n).$$

Findes der andre løsninger til denne differensligning?

- (b) Der er givet to følger

$$x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n.$$

Bestem koefficienterne b og c i differensligningen $x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$, således at begge følger er løsninger til denne differensligning.

- (c) Vis, at de tre følger i denne opgave,

$$x(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n$$

er lineært uafhængige følger.

Opgave 3. (a) Løs følgende problem grafisk

$$\begin{array}{l} \text{Minimér } y_1 + 2y_2 \\ \text{u.b.b.:} \\ y_1 + 6y_2 \geq 15, \\ y_1 + y_2 \geq 5, \\ -y_1 + y_2 \geq -5, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array}$$

(b) Opstil det duale problem og løs det vha. simplexmetoden.

(c) Hvad sker der med den optimale duale løsning, hvis bibetingelsen $y_1 + 6y_2 \geq 15$ ændres til $y_1 + 6y_2 \geq 15.1$?

(d) Betragt problemet

$$\begin{array}{l} \text{Maksimér } x_1 + 3x_2 + 5 \\ \text{u.b.b.:} \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1^2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

To aspekter ved dette problem skiller sig ud fra et sædvanligt LP problem. Hvilke?

(e) Find løsningen til problemet ved at løse et tilsvarende LP-problem grafisk.

Opgave 4. Betragt en “libertiner”, som er beskrevet ved indkomsten $m > 0$, og nyttefunktionen

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2,$$

hvor $x_1, x_2 > 0$ er forbruget af henholdsvis cappuccino og cigarer. Det antages, at al indkomsten bruges på de to nævnte varer. Prisen på vare 1 er $p_1 > 0$ og prisen på vare 2 er $p_2 > 0$. Det antages at $p_1 < m$.

(a) Opstil personens optimeringsproblem.

(b) Vis at personens to efterspørgselsfunktioner er $(x_1^{(D)}, x_2^{(D)}) = (\frac{m}{p_1} - 1, \frac{p_1}{p_2})$.

(c) Er varerne normale eller inferiøre, ordinære eller Giffen og substitutter eller komplementær?

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \quad (4)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (5)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (6)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta). \quad (7)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (8)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \quad (9)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \quad (10)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \quad (11)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \quad (12)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta). \quad (13)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta). \quad (14)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \quad (15)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \quad (16)$$