Første studieår

Matematik-Økonomi studerende
Introduktion til matematiske metoder i økonomi

Skriftlig reeksamen
februar 2011

Dato: 9. februar 2011
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.
Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = -3^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 2, \quad x(1) = 1.$$

(e) Vis, at

$$x_{\mathrm{p}}(n) = n \cdot 2^n$$

er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = -4 \cdot 2^n. \tag{2}$$

(f) Bestem en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = 3^n + 4 \cdot 2^n. \tag{3}$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = 3^n - 2$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 4$$

Findes der andre løsninger til denne differensligning?

(b) Der er givet en differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) + 2x(n) = f(n).$$

Bestem højresiden $f(n)$, således at $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2$ er en partikulær løsning til denne differensligning.

Bestem derefter den fuldstændige løsning til denne differensligning.

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering mv.

(a) Betragt følgende problem

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ 6x_1 + 9x_2\\
&\text{u.b.b.:}\\
&x_1 + 2x_2 \leq 5,\\
&3x_1 + 3x_2 \leq 12,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

og løs det ved en geometrisk betragtning (altså, løs det grafisk). Bemærk, at både den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning ønskes angivet.

(b) Opskriv det duale problem og løs også det grafisk.

(c) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned}
&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ (x_1 - 1) + 2(x_2 + 1)\\
&\text{u.b.b.:}\\
&x_2^2 \leq 4,\\
&1 - x_2 \geq x_1 - 2,\\
&(3x_1 - 2)^2 \leq 16,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(d) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler basal mikroøkonomi mv. En forbruger med nyttefunktionen $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ har en indkomst på $m = 200$. Prisen på vare 1 er $p_1 = 100$, og prisen på vare 2 er $p_2 = 25$. Det antages, at al indkomsten bruges på de to varer.

(a) Bestem marginalnytten af vare 1 og marginalnytten af vare 2.

(b) Bestem det marginale substitutionsforhold (MRS) mellem de to varer.

(c) Opskriv forbrugerens budgetbegrænsning, og brug denne til at finde forbruget x_2 af vare 2 som funktion af forbruget x_1 af vare 1.

(d) Hvis forbrugeren vil maksimere sin nytte, hvordan kan hun så bruge informationen fra spørgsmål (c) til at finde den optimale kombination af x_1 og x_2?

(e) Find den optimale kombination af x_1 og x_2.

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \tag{4}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta). \tag{7}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \tag{9}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \tag{11}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \tag{12}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta). \tag{13}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta). \tag{14}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \tag{15}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \tag{16}$$