Første studieår

Matematik-studerende
Introduktion til matematiske metoder

Skriftlig reeksamen
februar 2011

Dato: 9. februar 2011
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.
Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = -3^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 2, \quad x(1) = 1.$$

(e) Vis, at

$$x_{\mathrm{p}}(n) = n \cdot 2^n$$

er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = -4 \cdot 2^n. \tag{2}$$

(f) Bestem en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = 3^n + 4 \cdot 2^n. \tag{3}$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = 3^n - 2$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 4$$

Findes der andre løsninger til denne differensligning?

(b) Der er givet en differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) + 2x(n) = f(n).$$

Bestem højresiden $f(n)$, således at $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2$ er en partikulær løsning til denne differensligning.

Bestem derefter den fuldstændige løsning til denne differensligning.

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering mv.

(a) Betragt følgende problem

$$\begin{aligned}&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ 6x_1+9x_2\\&\text{u.b.b.:}\\&x_1+2x_2\leq 5,\\&3x_1+3x_2\leq 12,\\&x_1\geq 0, x_2\geq 0,\end{aligned}$$

og løs det ved en geometrisk betragtning (altså, løs det grafisk). Bemærk, at både den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning ønskes angivet.

(b) Opskriv det duale problem og løs også det grafisk.

(c) Forklar, hvordan følgende problem, som <u>ikke</u> er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned}&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ (x_1-1)+2(x_2+1)\\&\text{u.b.b.:}\\&x_2^2\leq 4,\\&1-x_2\geq x_1-2,\\&(3x_1-2)^2\leq 16,\\&x_1\geq 0, x_2\geq 0.\end{aligned}$$

(d) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned}x_1(n+1)&=2x_1(n)-2x_2(n),\\x_2(n+1)&=-4x_1(n).\end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1)=A\mathbf{x}(n)$.

(b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n\geq 1$.

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0)=1$ og $x_2(0)=-1$.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned}x_1(n+1)&=2x_1(n)-2x_2(n)+1,\\x_2(n+1)&=-4x_1(n)+1.\end{aligned}$$

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \tag{4}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta). \tag{7}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \tag{9}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \tag{11}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \tag{12}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta). \tag{13}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta). \tag{14}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \tag{15}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \tag{16}$$