## Første studieår
## Introduktion til matematiske metoder

# Prøveeksamen
# december 2010
# matematik studiet
# med svar

**Varighed:** 4 timer

**Tilladte hjælpemidler:** Lærebøger, notater mv. må medbringes.

**Ikke tilladte hjælpemidler:** Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Opgavesættet** findes på de følgende 5 sider.

**Vedrørende besvarelse:** Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.
Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

**Bemærk:** Korte svar er indsat efter hvert spørgsmål. De er ment som en facitliste. En fuldstændig besvarelse kræver begrundelser og udregninger.

**Opgave 1.** Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 4 \cdot 2^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

**Svar:** $r^2 - r - 6 = 0$, rødder $-2$ og 3. Løsning $x(n) = c_1(-2)^n + c_2 3^n$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

**Svar:** Gæt på $y(n) = c2^n$. Partikulær løsning $y_p(n) = -2^n$.

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

**Svar:** $x(n) = c_1(-2)^n + c_2 3^n - 2^n$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 5, \quad x(1) = 1.$$

**Svar:** $x(n) = 3(-2)^n + 3 \cdot 3^n - 2^n$

(e) Vis, at $x_{\mathrm{p}}(n) = n + 1$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5. \tag{2}$$

**Svar:** Indsæt $x_{\mathrm{p}}(n) = n + 1$ i venstre side og regn ud

$$(n + 1 + 2) - (n + 1 + 1) - 6(n + 1) = -6n - 5$$

altså en løsning.

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = -6n - 5 + 4 \cdot 2^n. \tag{3}$$

**Svar:** $x(n) = c_1(-2)^n + c_2 3^n - 2^n + n + 1$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, p.g.a. linearitet.

**Opgave 2.** Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = \frac{1}{n+1}$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = \frac{n+1}{n+2} x(n).$$

**Svar:** Sæt ind

$$\frac{n+1}{n+2}x(n) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1+1} = x(n+1)$$

altså en løsning.

Findes der andre løsninger til denne differensligning?

**Svar:** Ja, alle $\frac{c}{n+1}$, $c \in \mathbf{R}$, er løsninger.

(b) Der er givet to følger

$$x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n.$$

Bestem koefficienterne $b$ og $c$ i differensligningen $x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$, således at begge følger er løsninger til denne differensligning.

**Svar:** Metode 1: Indsæt i ligningen. Det giver systemet

$$\begin{aligned} 9 + 3b + c &= 0 \\ 18 + 3b &= 0 \end{aligned}$$

med løsningerne $b = -6$ og $c = 9$.

Metode 2: Ifølge teorien må 3 være en dobbeltrod i den karakteristiske ligning, altså $(r-3)^2 = r^2 - 6r + 9$, som giver $b = -6$ og $c = 9$.

(c) Vis, at de tre følger i denne opgave,

$$x(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_1(n) = 3^n, \quad x_2(n) = n3^n$$

er lineært uafhængige følger.

**Svar:** Beregn Casorati determinanten for $n = 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 9 & 18 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$$

Ifølge teorien er de tre følger lineært uafhængige.

**Opgave 3.** (a) Løs følgende problem grafisk

$$
\begin{aligned}
&\underset{y_1,y_2}{\text{Minimér}}\ y_1 + 2y_2\\
&\text{u.b.b.:}\\
&y_1 + 6y_2 \geq 15,\\
&y_1 + y_2 \geq 5,\\
&-y_1 + y_2 \geq -5,\\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

**Svar:** Minimumspunktet fås ved først at tegne de tre linier der umiddelbart fås af de tre øverste uligheder. Det brugbare område fås så umiddelbart (begrænset nedad) af tre linier samt den første kvadrant ($y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$). Niveaulinierne for objektfunktionen har hældningskoefficient $-\frac{1}{2}$. Det mindste niveau, der overholder begrænsningerne, er det hvor linien går igennem punktet $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (3, 2)$ Værdien af objektfunktionen i optimum er 7.

(b) Opstil det duale problem og løs det vha. simplexmetoden.

**Svar:**

$$
\begin{aligned}
&\underset{y_1,y_2}{\text{Maximér}}\ 15x_1 + 5x_2 - 5x_3\\
&\text{u.b.b.:}\\
&x_1 + x_2 - x_3 \leq 1,\\
&6x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplextabellerne bliver (med lidt hovedregning og passende bibeholdelse af "sjettedele" og "femtedele")

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & \\
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\
\hline
-15 & -5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & \\
0 & 5/6 & -7/6 & 1 & -1/6 & 0 & 4/6\\
1 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 2/6\\
\hline
0 & -5+15/6 & 5+15/6 & 0 & 15/6 & 1 & 5
\end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & \\
0 & 1 & -7/5 & 6/5 & -1/5 & 0 & 4/5\\
1 & 0 & 1/6+7/30 & -1/5 & 1/6+1/30 & 0 & 2/6 - 4/30 = 1/5\\
\hline
0 & 0 & \underbrace{45/6 - 21/6}_{4} & 3 & \underbrace{12/6}_{2} & 1 & 7
\end{array}
$$

Vi ser, at maksimumspunktet er $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1/5, 4/5, 0)$.

(c) Hvad sker der med den optimale duale løsning, hvis bibetingelsen $y_1 + 6y_2 \geq 15$ ændres til $y_1 + 6y_2 \geq 15.1$?

**Svar:** Optimumsværdien vil blive forøget med $\bar{x}_1 \cdot 0.1 = 0.02$.

(d) Betragt problemet

$$\begin{aligned}&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ x_1 + 3x_2 + 5\\&\text{u.b.b.:}\\&x_1 + 2x_2 \leq 6,\\&x_1^2 \leq 4,\\&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

To aspekter ved dette problem skiller sig ud fra et sædvanligt LP problem. Hvilke?

**Svar:** Der er lagt en konstant (5) til det sædvanlige skalarprodukt i objektfunktionen. Dette ændrer tydeligvis intet. Desuden er anden bibetingelse ikke-lineær: $x_1^2 \leq 4$.

(e) Find løsningen til problemet ved at løse et tilsvarende LP-problem grafisk.

**Svar:** Det tilsvarende LP problem er

$$\begin{aligned}&\underset{x_1,x_2}{\text{Maksimér}}\ x_1 + 3x_2\\&\text{u.b.b.:}\\&x_1 + 2x_2 \leq 6,\\&x_1 \leq 2,\\&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Grafisk løsning giver optimalpunktet $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 3)$ med maksimalværdien af den oprindelige objektfunktion lig med 14.

**Opgave 4.** Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= 4x_1(n) + 2x_2(n),\\x_2(n+1) &= -x_1(n) + x_2(n).\end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en $2 \times 2$ matrix $A$, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.

**Svar:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Beregn udtryk for potenserne $A^n$ for alle $n \geq 1$.

**Svar:** Egenværdier for $A$: $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$. Putzers algoritme giver efter simplifikation

$$A^n = 2^n \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 4$ og $x_2(0) = -1$.

**Svar:**

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 4x_1(n) + 2x_2(n) + 2, \\ x_2(n+1) &= -x_1(n) + x_2(n) + 3. \end{aligned}$$

**Svar:**

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = 2^n \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

for alle $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Bemærk, at løsningen kan skrives på andre (ækvivalente) måder.