Fys2 og Nano4
Dataanalyse og Differentialligninger
Skriftlig Eksamen

Dato: d. 31 marts 2008

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale 5.227, Skjernvej 4, 9220 Aalborg.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, lommeregnere, osv.).

Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Eksamenssættet findes på den næste side.

Bemærkning: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt. For at bestå eksamenen, kræves der at få mindst 50 ud af 100 mulige point.

Opgave 1. Betragt ligningen/*Consider the equation*/:

$$y''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} y'(x) = 1, \quad x > 0. \tag{1}$$

1. (10 point) Find to lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning/*Find two linearly independent solutions to the homogeneous equation*/. (Vink/*Hint*/: Lad/*Let*/ $z(x) = y'(x)$ og find/*and find*/ z først.)
2. (10 point) Find en partikulær løsning til den inhomogene ligning, ved hjælp af konstanters variationsmetode/*Find a solution to the inhomogeneous equation by using the variation of constants method*/.
3. (5 point) Find løsningen/*Find the solution*/ y som opfylder/*which satisfies*/ $y(1) = 0$ og $y'(1) = 0$.

Opgave 2. Betragt ligningen/*Consider the equation*/:

$$xy''(x) + y'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. (10 point) Find to lineært uafhængige rækkeløsninger til den homogene ligning, i nærheden af/*Find two linearly independent solutions to the homogeneous equation in a neighborhood of* / $x_0 = 0$.
2. (10 point) Hvis/*If*/ $y_p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, find $a_0, \ldots, a_3$ for at/*such that*/ y_p bliver en partikulær løsning til den inhomogene ligning/*becomes a particular solution to the inhomogeneous equation*/.
3. (5 point) Find løsningen/*Find the solution*/ y som opfylder/*which satisfies*/ $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Opgave 3. Elektronen i et brintatom ligger i/*The electron of a hydrogen atom lies in*/ $\mathbb{R}^3$, og er beskrevet af bølgefunktionen/*and is described by the wavefunction*/ $\psi(x, y, z) = Ce^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, hvor/*where*/ $C > 0$.

1. (5 point) Hvad skal/*What must*/ C være for at/*be so that*/ $p(x, y, z) := \psi^2(x, y, z)$ definerer en tæthedsfunktion for koordinaterne/*defines a probability density for the coordinates*/ (X, Y, Z)? (Vink: Brug sfæriske koordinater/*Hint: Use spherical coordinates.*/)
2. (15 point) Find fordelingsfunktionen for variablen/*Find the distribution function for the variable*/ $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, givet ved/*given by*/:

$$F_R(t) = Prob(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq t) = \int\int\int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq t} p(x, y, z)dxdydz.$$

3. (15 point) Find $Var(X)$, $Var(Y)$ og $Var(X + Y)$.

Opgave 4. (15 point) Vi måler tre reele, uafhængige stokastiske variabler/*We measure three real and independent stochastic variables*/ A, B og C. Middelværdien af/*The mean value of*/ A er $\mu_A = 1$, middelværdien af B er $\mu_B = 2$, og middelværdien af B er $\mu_B = 3$. Deres varianser er/*Their variances are*/ $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = 1$. Vi er interesserede i størrelsen/*We are interested in the quantity*/ $f(A, B, C) = \frac{AB}{C}$. Find den relative fejl/*Find the relative error*/

$$\epsilon_f := \frac{\sigma_f}{f}.$$