Matematik 2
Matematisk Analyse 2

Skriftlig eksamen
2009

Dato: 10. juni 2009
Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00
Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 2 sider.

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

(a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

er konvergent, og bestem dens sum.

(b) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^2+1}$$

er konvergent. Er den absolut konvergent?

(c) Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^n x^n.$$

Opgave 2. Lad $V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \quad \text{og} \quad y > 0\}$. En afbildning $f: V \to \mathbf{R}^2$ er givet ved

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

(a) Beregn Jacobimatricen $Df(x, y)$ og Jacobideterminanten $\Delta_f(x, y)$ for alle $(x, y) \in V$.

(b) Vis, at f er injektiv på V. Bestem billedmængden $f(V)$, og bestem eksplicit udtrykket for den inverse afbildning f^{-1}.

(c) Bestem Jacobimatricen $D(f^{-1})(u, v)$ for alle $(u, v) \in f(V)$.

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x-\pi)^2+4}dx = -\frac{\pi}{2e^2}$$

ved at bruge residueregning.

Opgave 4. Der er givet en kompleks funktion ved

$$h(z) = \frac{e^z - 1}{z(z^2 + i)}.$$

(a) Gør rede for, at $h(z)$ er en meromorf funktion.

(b) For hver af de isolerede singulariteter i $h(z)$ skal man afgøre, om de er hævelige eller poler. Angiv ordenen af de fundne poler.

(c) Bestem nulpunkterne for $h(z)$. Angiv for hvert nulpunkt dets multiplicitet.

(d) Beregn integralet

$$\int_{\partial B(0,5\pi)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz,$$

hvor vejen $\partial B(0, 5\pi)$ er cirklen med centrum i nul og radius 5π, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning.