Mat2
Matematisk Analyse 2

Skriftlig re-eksamen
25. august 2008

Dato: 25. august 2008

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Opgave 1. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{z^2}{(z^3 + 2z^2 + 2z)(z^2 + 1)} .$$

1. Bestem nulpunkterne for h og deres orden.
2. Bestem singulariteterne for h og deres type (hævelige, poler, essentielle). Bestem ordenen af eventuelle poler, og afgør, om h er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$.
3. Lad γ betegne den vej, som består i at gennemløbe cirklen $|z - (-\frac{1}{2}, i)| = 1$ én gang i positiv omløbsretning. Beregn $\int_\gamma h(z)\, dz$.
4. Udregn
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^3 + 2x^2 + 2x)(x^2 + 1)}\, dx .$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Afgør, om den uendelige række
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n - e^n}$$
er konvergent eller divergent. Svaret skal begrundes.
2. Vis, at rækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3} \log 8)^n$$
er absolut konvergent. Find summen af denne uendelige række.
3. Er den uendelige række
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+3} \cos\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$$
konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.
4. Beregn konvergensradius for potensrækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+3} \cos\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big) x^n .$$

Opgave 3. Denne opgave omhandler funktionsrækker. Der er givet den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(f(x)\big)^n , \tag{1}$$

med

$$f(x) = \begin{cases} x \log x \, , & x \in (0,1] \\ 0 \, , & x = 0 \end{cases} .$$

1. Vis, at $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og bestem $\max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
2. Vis, at rækken i (1) er absolut og uniformt konvergent på $[0,1]$.
3. Summen af denne række betegnes med $g(x)$. Vis, at funktionen $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ er kontinuert differentiabel, og at der gælder

$$g'(x) = (1 + \log x) \sum_{n=1}^{\infty} n\big(f(x)\big)^{n-1} .$$

Opgave 4. Der er givet en ligning

$$(x^2 + z)e^{x-y} - e^z(2xy + zx - y) = 0 \tag{2}$$

i de tre reelle variable (x, y, z). Der er også givet et punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

1. Vis, at (x_0, y_0, z_0) opfylder ligningen givet i (2).
2. Vis, at der findes en kontinuert differentiabel funktion $g(x, z)$ defineret i en åben mængde U, med $(x_0, z_0) \in U$, således at $g(x_0, z_0) = y_0$ og

$$(x^2 + z)e^{x-g(x,z)} - e^z(2x\, g(x, z) + zx - g(x, z)) = 0$$

for alle $(x, z) \in U$.

3. Bestem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, z_0) \, , \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, z_0) \, .$$