Noget om Riemann integralet.
Noter til Matematik 2

Arne Jensen
Afdeling for Matematik og Datalogi
Institut for Elektroniske Systemer
Aalborg Universitetscenter
Fredrik Bajers Vej 7
9220 Aalborg Ø

4. april 1991
Revideret 12. februar 1998

1 Introduktion

I disse noter gennemgår vi meget kort definition og nogle egenskaber ved Riemann integralet. Denne gennemgang erstatter kapitel 7 i Apostols bog og gør det muligt at læse beviserne i kapitel 9 uden at kende kapitel 7.

2 Definitioner

Vi starter med en række definitioner. Lad $[a,\, b]$ være et lukket interval. En *inddeling* $\mathcal{P}$ af $[a,\, b]$ er en endelig delmængde af intervallet

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

som opfylder $x_0 = a$, $x_n = b$, og $x_{j-1} < x_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. En inddeling $\mathcal{P}_1$ siges at være *finere* end $\mathcal{P}$, hvis $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ (mængdeinklusion). Mængden af alle inddelinger af et givet interval betegnes $\mathcal{I}[a,\, b]$.

Normen af en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]$ er længden af det største delinterval bestemt af $\mathcal{P}$ og betegnes $\|\mathcal{P}\|$. I symboler:

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \|\mathcal{P}\| = \max\{x_j - x_{j-1} \,|\, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Vi bemærker, at $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ medfører $\|\mathcal{P}_1\| \leq \|\mathcal{P}\|$.

Givet en inddeling $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ og $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, så siges $\mathbf{t}$ at være *underordnet* $\mathcal{P}$, hvis $t_j \in [x_{j-1},\, x_j]$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Lad f være en begrænset reel funktion defineret på $[a,\, b]$. Givet $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]$ og $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$, så definerer vi *middelsummen* ved

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{1}$$

(Vi bruger næsten samme betegnelser som i Apostol). For $j = 1, 2, \ldots, n$ definerer vi

$$m_j(f) = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1},\, x_j]\} \tag{2}$$
$$M_j(f) = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1},\, x_j]\} \tag{3}$$

og ved hjælp af disse tal definerer vi *undersummen* (L kommer fra det engelske lower) ved

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(f)(x_j - x_{j-1}) \tag{4}$$

og *oversummen* (U kommer fra det engelske upper) ved

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(f)(x_j - x_{j-1}). \tag{5}$$

Det følger umiddelbart af definitionerne, at vi har ulighederne

$$L(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) \leq U(\mathcal{P}, f) \tag{6}$$

for ethvert valg af $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$. Se Figur 1 for et eksempel. Med disse forberedelser kan vi nu definere Riemann integrabilitet.

Definition 2.1. *En begrænset funktion f på $[a,\, b]$ siges at være Riemann integrabel på $[a,\, b]$, hvis der findes et tal A med følgende egenskab: Givet $\varepsilon > 0$, så findes en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]$, således at for alle $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{I}[a,\, b]$ med $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ og alle $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}_1$ gælder*

$$|S(\mathcal{P}_1, \mathbf{t}, f) - A| < \varepsilon.$$

Vi skriver $A = \int_a^b f(x)dx$. Mængden af Riemann integrable funktioner på $[a,\, b]$ betegnes $\mathcal{R}[a,\, b]$.

Det er klart fra definitionen, at der højst eksisterer ét tal A med denne egenskab, så notationen $A = \int_a^b f(x)dx$ giver mening.

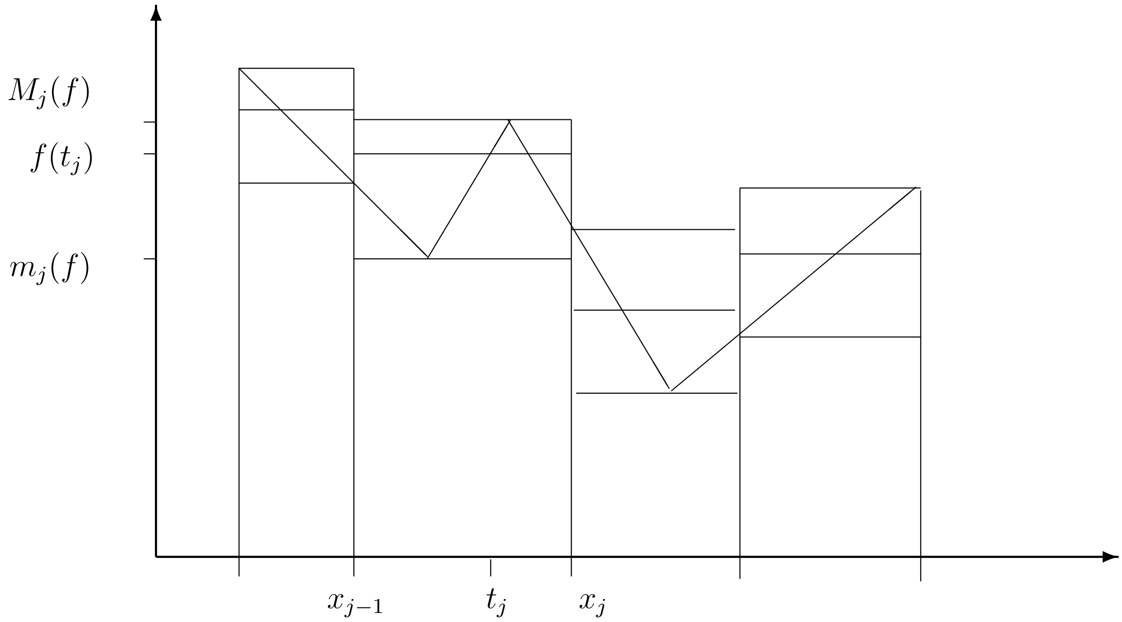

Figure 1: Tegningen illustrerer undersum, middelsum og oversum

3 Karakterisation af Riemann integrabilitet

Definition 2.1 skal suppleres med karakterisation af Riemann integrabilitet for at kunne bruges i praksis. Vi giver to resultater. Det første resultat viser, at Riemann integrabilitet også kan karakteriseres ved hjælp af oversummer og undersummer.

Sætning 3.1. *Lad f være en begrænset funktion på $[a, b]$. Så er $f \in \mathcal{R}([a, b])$ hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt: Givet $\varepsilon > 0$, så findes der en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a, b]$, således af for alle inddelinger $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{I}[a, b]$ med $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ gælder*

$$U(\mathcal{P}_1, f) - L(\mathcal{P}_1, f) < \varepsilon.$$

Bevis: Antag først $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Sæt $A = \int_a^b f(x)dx$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes ifølge definitionen på Riemann integrabilitet en inddeling $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{I}[a, b]$, således at for alle $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a, b]$ med $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ og alle $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$ gælder

$$|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - A| < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{7}$$

Lad nu $\mathcal{P}$ være valgt vilkårligt, $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$, men fastholdt i resten af denne del af beviset.

Bruger vi (7) for to forskellige valg $\mathbf{t}$ og $\mathbf{s}$, så finder vi

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=1}^{n}(f(t_j)-f(s_j))(x_j-x_{j-1})| && (8)\\
&\qquad = |\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j-x_{j-1}) - A + A - \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j-x_{j-1})| && (9)\\
&\qquad \le |\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j-x_{j-1}) - A| + |A - \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j-x_{j-1})| && (10)\\
&\qquad < \frac{2}{3}\varepsilon. && (11)
\end{aligned}
$$

Sæt nu $\mu = \varepsilon/(3(b-a))$. Bruger vi definitionen af $M_j(f)$ og $m_j(f)$ som henholdsvis supremum og infimum, så kan vi finde $t_j \in [x_{j-1},\, x_j]$, således at

$$M_j(f) < f(t_j) + \mu/2$$

og $s_j \in [x_{j-1},\, x_j]$, således at

$$m_j(f) > f(s_j) - \mu/2.$$

Heraf følger

$$M_j(f) - m_j(f) < f(t_j) - f(s_j) + \mu$$

og dernæst

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{j=1}^{n}(M_j(f)-m_j(f))(x_j-x_{j-1}) && (12)\\
&< \sum_{j=1}^{n}(f(t_j)-f(s_j))(x_j-x_{j-1}) + \mu\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j-1}) && (13)\\
&< \frac{2}{3}\varepsilon + \mu(b-a) = \varepsilon. && (14)
\end{aligned}
$$

Det beviser den ene del af sætningen. For at bevise den anden del starter vi med lidt notation. Vi definerer det øvre integral som

$$\overline{I}(f) = \inf\{U(\mathcal{P}, f) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]\}$$

og det nedre integral som

$$\underline{I}(f) = \sup\{L(\mathcal{P}, f) \,|\, \mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]\}.$$

Det følger af (6), at $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$. Lad nu betingelsen i anden del af sætningen være opfyldt. Så gælder $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Det ses på følgende måde: Givet $\varepsilon > 0$. Så findes efter antagelsen en inddeling $\mathcal{P} \in \mathcal{I}[a,\, b]$ med $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$. Men så har vi

$$\overline{I}(f) \le U(\mathcal{P}, f) < L(\mathcal{P}, f) + \varepsilon \le \underline{I}(f) + \varepsilon$$

eller

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon.$$

Da ε er vilkårlig, følger $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Ideen i beviset er at vise, at f er Riemann integrabel med integral $A = \int_a^b (fx)dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Lad $\varepsilon >$ være givet. Bestem nu $\mathcal{P}'$ således, at $U(\mathcal{P}', f) < \overline{I}(f) + \varepsilon$. Så gælder ifølge Lemma 3.2 nedenfor

$$U(\mathcal{P}, f) < \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}'$. Tilsvarende bestemmes $\mathcal{P}''$ således, at

$$L(\mathcal{P}, f) > \underline{I}(f) - \varepsilon$$

for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}''$, hvor vi igen har brugt Lemma 3.2. Sæt $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ og antag, at $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ er vilkårlig. Så gælder for et vilkårligt $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$

$$A - \varepsilon = \underline{I}(f) - \varepsilon < L(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) \leq U(\mathcal{P}, f) < \overline{I}(f) + \varepsilon = A + \varepsilon$$

eller

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - A| < \varepsilon.$$

Det beviser, at f er Riemann integrabel. $\square$

Vi har i beviset overfor brugt følgende Lemma:

Lemma 3.2. *Antag, at f er en begrænset funktion på $[a,\, b]$. Antag, at $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{I}[a,\, b]$ og $\mathcal{P}_2 \supseteq \mathcal{P}_1$. Så gælder*

$$U(\mathcal{P}_2, f) \leq U(\mathcal{P}_1, f) \quad \textit{og} \quad L(\mathcal{P}_1, f) \leq L(\mathcal{P}_2, f).$$

Bevis: Det er nok at se på det tilfælde, hvor $\mathcal{P}_2$ har et punkt mere end $\mathcal{P}_1$. Kald dette punkt er c, og antag $c \in (x_{j-1},\, x_j)$. Sæt

$$M_1 = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1},\, c]\}, \qquad M_2 = \sup\{f(x) \,|\, x \in [c,\, x_j]\}.$$

Så er (se (2)) $M_1 \leq M_j(f)$ og $M_2 \leq M_j(f)$, og vi har

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_2, f) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + M_1(c - x_{j-1}) + M_2(x_j - c) && (15) \\ &\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + M_j(f)(c - x_{j-1}) + M_j(f)(x_j - c) && (16) \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = U(\mathcal{P}_1, f). && (17) \end{aligned}$$

Det viser det første resultat. Det andet resultat vises på samme måde. $\square$

Ved hjælp af ovenstående sætning kan vi nu bevise hovedresultatet.

Sætning 3.3. *Antag, at f er kontinuert på $[a,\, b]$. Så gælder $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$, dvs. f er Riemann integrabel på $[a,\, b]$.*

Bevis: Beviset bygger på, at kontinuitet på det lukkede interval $[a,\, b]$ medfører uniform kontinuitet (se Apostol Theorem 4.47). Vi bruger Sætning 3.1 i beviset. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Bestem $\delta > 0$, således at $|x - y| < \delta$ medfører $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2(b-a))$ for alle $x, y \in [a,\, b]$. Det er muligt, da f er uniformt kontinuert. Lad $\mathcal{P}$ være en inddeling med $\|\mathcal{P}\| < \delta$ og lad $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}$ være vilkårlig. Da længden af ethvert delinterval bestemt af $\mathcal{P}_1$ er mindre end δ, følger $M_j(f) - m_j(f) \leq \varepsilon/(2(b-a))$ og dermed

$$U(\mathcal{P}_1, f) - L(\mathcal{P}_1, f) = \sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \tag{18}$$

$$\leq \varepsilon/(2(b-a)) \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{19}$$

Det viser, at betingelsen i Sætning 3.1 er opfyldt, og dermed, at $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. □

4 Egenskaber ved Riemann integralet

Vi giver en række egenskaber ved Riemann integralet med korte beviser.

Sætning 4.1. *$\mathcal{R}([a,\, b])$ er et reelt vektorrum. For $f, g \in \mathcal{R}([a,\, b])$ og $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ gælder*

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis: Sæt $h = c_1 f + c_2 g$. Så gælder for middelsummerne

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, h) = c_1 S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) + c_2 S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, g).$$

Givet $\varepsilon > 0$, så kan vi bestemme en inddeling $\mathcal{P}'$, således at for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}'$ gælder

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

og en inddeling $\mathcal{P}''$, således at for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}''$ gælder

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, g) - \int_a^b g(x)dx| < \varepsilon.$$

Sæt nu $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$. Så gælder for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, h) - c_1 \int_a^b f(x)dx - c_2 \int_a^b g(x)dx| < |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon.$$

Heraf følger resultatet. □

Sætning 4.2. *Antag $c \in (a,\, b)$ og at f er Riemann integrabel over to af de tre intervaller $[a,\, b]$, $[a,\, c]$ og $[c,\, b]$. Så er f også Riemann integrabel over det tredje, og der gælder*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{20}$$

Bevis: Vi antager, at f er integrabel over $[a,\, c]$ og $[c,\, b]$. Antag $\mathcal{P}$ er en inddeling af $[a,\, b]$ med $c \in \mathcal{P}$. Sæt

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap [a,\, c], \qquad \mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cap [c,\, b]. \tag{21}$$

Så er $\mathcal{P}'$ en inddeling af $[a,\, c]$ og $\mathcal{P}''$ en inddeling af $[c,\, b]$, og der gælder

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) = S(\mathcal{P}', \mathbf{t}', f) + S(\mathcal{P}'', \mathbf{t}'', f),$$

hvor vi også deler $\mathbf{t}$ op på en indlysende måde. Givet $\varepsilon > 0$, så findes der en inddeling $\mathcal{P}'_0$ af $[a,\, c]$, således at for alle $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}'_0$ gælder

$$|S(\mathcal{P}', \mathbf{t}', f) - \int_a^c f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

og en inddeling $\mathcal{P}''_0$ af $[c,\, b]$, således at for alle $\mathcal{P}'' \supseteq \mathcal{P}''_0$ gælder

$$|S(\mathcal{P}'', \mathbf{t}'', f) - \int_c^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vi sætter $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}'_0 \cup \mathcal{P}''_0$. Lad nu $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ og definer $\mathcal{P}'$ og $\mathcal{P}''$ ved (21). Vi har da

$$|S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx| < \varepsilon$$

for alle $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ og alle $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$. Resultatet følger heraf. De andre tilfælde behandles på samme måde. $\square$

Vi indfører de sædvanlige konventioner, hvorefter vi sætter $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ og $\int_a^a f(x)dx = 0$. Derefter gælder formlen (20) for vilkårlig beliggenhed af a, b og c, hvis funktionen er Riemann integrabel over de relevante intervaller.

Sætning 4.3. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$ og $g \in \mathcal{R}([a,\, b])$, og at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a,\, b]$. Så gælder*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis: Det følger af definitionen på middelsum, at der gælder

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, f) \leq S(\mathcal{P}, \mathbf{t}, g)$$

for enhver inddeling $\mathcal{P}$ og ethvert $\mathbf{t}$ underordnet $\mathcal{P}$. Men heraf følger sætningen umiddelbart. $\square$

For en funktion f betegner $|f|$ funktionen givet ved $|f|(x) = |f(x)|$, og f^2 funktionen givet ved $f^2(x) = (f(x))^2$. Vi har følgende resultater.

Sætning 4.4. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Så er $|f| \in \mathcal{R}([a,\, b])$ og der gælder*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$

Bevis: Vi bruger Sætning 3.1 i beviset. Vi har

$$M_j(f) - m_j(f) = \sup\{f(x) - f(y) \,|\, x, y \in [x_{j-1},\, x_j]\}$$

og da $|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leq |f(x) - f(y)|$, har vi

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) \leq M_j(f) - m_j(f)$$

(idet vi udnytter $M_j(f) - m_j(f) \geq 0$) og dermed

$$U(\mathcal{P}, |f|) - L(\mathcal{P}, |f|) \leq U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f)$$

Da det gælder for alle inddelinger, giver Sætning 3.1, at $|f| \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Vi har $f \leq |f|$ og $-f \leq |f|$, så uligheden følger fra Sætning 4.3. □.

Advarsel. Der gælder ikke, at $|f| \in \mathcal{R}([a,\, b])$ medfører $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Det er en af de største svagheder ved Riemann integralet. Vi illustrerer dette med et eksempel. Definer en funktion på [0, 1] ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & for x irrational, \\ -1 & for x rational. \end{cases}$$

Så gælder $U(\mathcal{P}, f) = 1$ og $L(\mathcal{P}, f) = -1$ for alle inddelinger $\mathcal{P}$ af [0, 1]. Men så er f ikke Riemann integrable ifølge Sætning 3.1. På den anden side er $|f|$ lig den konstante funktion 1, som er Riemann integrabel.

Sætning 4.5. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Så er $f^2 \in \mathcal{R}([a,\, b])$.*

Bevis: Vi bruger igen Sætning 3.1. Der gælder $M_j(f^2) = (M_j(|f|))^2$ og $m_j(f^2) = (m_j(|f|))^2$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} M_j(f^2) - m_j(f^2) &= (M_j(|f|) + m_j(|f|))(M_j(|f|) - m_j(|f|)) \quad (22)\\ &\leq 2K(b-a)(M_j(|f|) - m_j(|f|)), \quad (23) \end{aligned}$$

hvor K er en konstant, så at $|f(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,\, b]$. Men så følger resultatet af Sætning 4.4 og Sætning 3.1. □

Sætning 4.6. *Antag $f \in \mathcal{R}([a,\, b])$ og $g \in \mathcal{R}([a,\, b])$. Så er $fg \in \mathcal{R}([a,\, b])$.*

Bevis: Resultatet følger af

$$2f(x)g(x) = (f(x) + g(x))^2 - (f(x))^2 - (g(x))^2$$

og Sætning 4.5. □

Sætning 4.7. *Antag, at f er kontinuert på $[a, b]$ og definér for $x \in [a, b]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Så er F kontinuert differentiabel på $[a, b]$, og der gælder

$$F'(x) = f(x).$$

Bevis: Vi har

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt.$$

Givet $\varepsilon > 0$, så kan vi på grund af kontinuiteten af f bestemme et $\delta > 0$, således at for $|h| < \delta$ gælder $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ for alle t i intervallet mellem x og $x + h$. Heraf følger resultatet. □

Sætning 4.8. *Antag, at $f \in \mathcal{R}([a, b])$, og at der findes en funktion F, som er kontinuert på $[a, b]$ og differentiabel på (a, b) med $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$. Så gælder*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bevis: Lad $\mathcal{P}$ være en vilkårlig inddeling af $[a, b]$. Så gælder

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{j=1}^{n}(F(x_j) - F(x_{j-1})) && (24)\\ &= \sum_{j=1}^{n} F'(t_j)(x_j - x_{j-1}) && (25)\\ &= \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}), && (26) \end{aligned}$$

hvor $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ er bestemt ved at anvende middelværdisætningen (Apostol Theorem 5.11). For et givet $\varepsilon > 0$ kan vi nu bestemme en inddeling, som er så fin, at vi har

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx| = |\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Da ε er vilkårlig, følger resultatet. □

Vi får i næste afsnit brug for følgende resultat:

Sætning 4.9. *Lad* $f \in \mathcal{R}([a,\,b])$*, så at* $m \leq f(x) \leq M$*, for alle* $x \in [a,\,b]$*. Lad* $\varphi : [m,\,M] \to \mathbf{R}$ *være en kontinuert funktion. Sæt* $h(x) = \varphi(f(x))$ *for* $x \in [a,\,b]$*. Så er* $h \in \mathcal{R}([a,\,b])$*.*

Bevis: Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da φ er uniformt kontinuert på $[m,\,M]$, kan vi bestemme et $\delta > 0$, så at $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$ for alle $s, t \in [m,\,M]$ med $|s - t| < \delta$. Vi kan antage, at $\delta < \varepsilon$. Sæt nu

$$K = \sup\{|\varphi(t)| \mid t \in [m,\,M]\}.$$

Fra Sætning 3.1 får vi, at vi kan finde en inddeling $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, så at

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \delta^2.$$

Vi deler nu indices for punkterne i $\mathcal{P}$ op i to mængder:

$$\mathsf{M} = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} | M_j(f) - m_j(f) < \delta\}\,, \tag{27}$$

$$\mathsf{N} = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} | M_j(f) - m_j(f) \geq \delta\}\,. \tag{28}$$

Vi har da

$$\delta \sum_{j \in \mathsf{N}} (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j \in \mathsf{N}} (M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \tag{29}$$

$$= U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \delta^2. \tag{30}$$

Heraf ser vi

$$\sum_{j \in \mathsf{N}} (x_j - x_{j-1}) < \delta.$$

Vi har da

$$U(\mathcal{P}, h) - L(\mathcal{P}, h) = \sum_{j=1}^{n} (M_j(h) - m_j(h))(x_j - x_{j-1}) \tag{31}$$

$$= \sum_{j \in \mathsf{N}} (M_j(h) - m_j(h))(x_j - x_{j-1}) \tag{32}$$

$$+ \sum_{j \in \mathsf{N}} (M_j(h) - m_j(h))(x_j - x_{j-1}) \tag{33}$$

$$\leq \varepsilon(b - a) + 2K\delta \tag{34}$$

$$< \varepsilon(b - a + 2K), \tag{35}$$

hvor sidste ulighed følger af, at vi har antaget $\delta < \varepsilon$. Da ε er vilkårlig, får vi fra sætning 3.1, at $h \in \mathcal{R}([a,\,b])$. □

Vi ser, at vi kunne have vist Sætning 4.4 ved hjælp af Sætning 4.9, idet vi kan tage $\varphi(t) = |t|$.

5 Riemann integralet af funktioner med komplekse værdier

Vi skal nu udvide Riemann integralet til funktioner, der afbilder et interval $[a, b]$ over i de komplekse tal. Vi minder om, at en funktion $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ kan skrives som $f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f$.

Definition 5.1. *En begrænset funktion $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ er Riemann integrabel på $[a, b]$, hvis $\mathrm{Re} f \in \mathcal{R}([a, b])$ og $\mathrm{Im} f \in \mathcal{R}([a, b])$. Vi sætter*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)dx + i \int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx.$$

Mængden af komplekse Riemann integrable funktioner betegnes $\mathcal{R}([a, b]; \mathbf{C})$

Bemærk, at med denne definition er

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)dx \quad \text{og} \quad \mathrm{Im} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx.$$

Følgende sætning er en umiddelbar konsekvens af definitionen og Sætning 4.2

Sætning 5.2. *$\mathcal{R}([a, b]; \mathbf{C})$ er et komplekst vektorrum. Afbildningen*

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

er en lineær afbildning fra $\mathcal{R}([a, b]; \mathbf{C})$ til $\mathbf{C}$.

Sætning 5.3. *Lad $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbf{C})$. Så er $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$, og der gælder*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bevis: Vi har, at

$$|f(x)|^2 = (\mathrm{Re} f(x))^2 + (\mathrm{Im} f(x))^2.$$

Sætningerne 4.2 og 4.5 viser nu, at $|f|^2 \in \mathcal{R}([a, b])$. Sæt $\varphi(t) = \sqrt{t}$ for $t \geq 0$. Så følger det af Sætning 4.9, at $|f(x)| = \varphi(|f(x)|^2)$ er Riemann integrabel på $[a, b]$.

Bestem nu et $\theta \in \mathbf{R}$, så at

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = e^{i\theta} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{i\theta} f(x)dx.$$

Vi har da, idet vi bruger Sætningerne 4.4 og 4.3,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \operatorname{Re}\int_a^b e^{i\theta} f(x)dx \tag{36}$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{i\theta} f(x))dx \tag{37}$$

$$\leq \int_a^b |\operatorname{Re}(e^{i\theta} f(x))|dx \tag{38}$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{39}$$

Heraf følger sidste del af sætningen. □