

Mat2 og MatØk4 Matematisk Analyse 2

Skriftlig prøveeksamen
31. maj 2011

Dato: 31. maj 2011

Tidspunkt: Kl. 09:00–13:00

Sted: Lokale G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

WITH ANSWERS
Problems 1 and 2 in Danish
Problems 3 and 4 in English

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^4 + n^3 + n^2 + 4}$$

konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

Løsning _____

$3 \leq 3n^2$ og $n^4 + n^3 + n^2 + 4 \geq n^4$ giver

$$0 \leq \frac{n^2 + 3}{n^4 + n^3 + n^2 + 4} \leq \frac{4}{n^2}$$

Rækken er derfor konvergent.

2. Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}}$$

konvergent eller divergent? Svaret skal begrundes.

Løsning _____

Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$, er det en alternerende række. Da $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ er aftagende og $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, er betingelserne i sætningen opfyldt. Rækken er derfor konvergent.

3. Bestem konvergensradius for de tre potensrækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} x^n, \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^{-n}) x^n.$$

Bestem derefter summen af de tre potensrækker for $x = \frac{1}{3}$.

Løsning _____

Første række: Rodkriteriet: $(2^n)^{1/n} = 2$, så konvergensradius er $\rho_1 = \frac{1}{2}$.

Anden række: Rodkriteriet $(3^{-n})^{1/n} = \frac{1}{3}$, så konvergensradius er $\rho_2 = 3$.

Da første og anden række er konvergente for $|x| < \frac{1}{2}$, og da første række er divergent for $|x| > \frac{1}{2}$, følger at konvergensradius for tredje række er $\frac{1}{2}$.

De tre summer har værdierne

$$3, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{33}{8}.$$

Opgave 2. Der er givet ligningerne

$$\begin{aligned}z \sin(x - y) + z^2 - x - y^2 &= -1, \\ \sin(z - xy) + z &= 1.\end{aligned}$$

Der er også givet et punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

1. Vis, at punktet (x_0, y_0, z_0) opfylder de to givne ligninger.

Løsning _____

Indsæt tallene!

2. Vis, at der findes en kontinuert differentiabel funktion $\mathbf{g}: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ defineret i en åben mængde $U \subseteq \mathbf{R}$, med $z_0 \in U$, således at $\mathbf{g}(z_0) = (x_0, y_0)$ og (med $\mathbf{g}(z) = (g_1(z), g_2(z))$)

$$\begin{aligned}z \sin(g_1(z) - g_2(z)) + z^2 - g_1(z) - g_2(z)^2 &= -1, \\ \sin(z - g_1(z)g_2(z)) + z &= 1.\end{aligned}$$

for alle $z \in U$.

Løsning _____

Vi skal verificere alle betingelserne i implicit funktionssætningen.

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} z \sin(x - y) + z^2 - x - y^2 + 1 \\ \sin(z - xy) + z - 1 \end{bmatrix}$$

er kontinuert differentiabel $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, da alle indgående funktioner er defineret overalt og kontinuert differentiable af deres argumenter. Vi har i første del vist $F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Vi mangler Jacobi-determinantbetingelsen.

Jacobi-matricen er

$$\begin{bmatrix} z \cos(x - y) - 1 & -z \cos(x - y) - 2y \\ -y \cos(z - xy) & -z \cos(z - xy) \end{bmatrix}$$

Indsæt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

som har determinant $-3 \neq 0$. Alle betingelser er derfor opfyldt og eksistensen af U og $\mathbf{g}$ med de angivne egenskaber følger.

3. Bestem

$$\frac{dg_1}{dz}(z_0) \quad \text{og} \quad \frac{dg_2}{dz}(z_0).$$

Løsning

Vi bruger implicit differentiation. Vi skriver x og $\partial x/\partial z$ etc. for at forenkle notationen. Resultatet er

$$\begin{aligned}\sin(x-y) + z \cos(x-y) \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + 2z - \frac{\partial x}{\partial z} - 2y \frac{\partial y}{\partial z} &= 0 \\ \cos(z-xy) - y \cos(z-xy) \frac{\partial x}{\partial z} - x \cos(z-xy) \frac{\partial y}{\partial z} + 1 &= 0\end{aligned}$$

Indsættelse af $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ giver

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z}(1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial z}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Heraf følger

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(1) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z}(1) = \frac{4}{3}$$

Opgave 3. Show by using the calculus of residues that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2} dx = \frac{3\pi e^{-2}}{16}.$$

Solution

We have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+4)^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2} dx =$$

We use Proposition 9.4 from [AJ]. $f(z) = 1/(z^2+4)^2$ is a meromorphic function with poles of order 2 at $\pm 2i$.

We have

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| \leq \frac{1}{(R^2-4)^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

Thus we can apply the result in the Proposition. We need to calculate the residue at the pole $2i$. We have

$$H(z) = (z-2i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}$$

and then

$$H'(z) = \frac{ie^{iz}}{(z+2i)^2} - 2 \frac{e^{iz}}{(z+2i)^3}$$

Thus

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}, 2i\right) = H'(2i) = -i\frac{3e^{-2}}{32}$$

which implies the result.

Opgave 4. We define the function

$$h(z) = \frac{z^2 - 2iz - 1 - 2i}{(z^3 + 1)^2}.$$

1. Show that the polynomial of degree two $z^2 - 2iz - 1 - 2i$ has the roots -1 and $1 + 2i$.

Solution

This is verified by substitution the roots into the polynomial and showing that the result is zero.

2. Determine the singularities of h and their type (removable, pole, essential). Determine the order of any poles, and determine if h is a meromorphic function on $\mathbf{C}$.

Solution

The numerator is factored as $(z + 1)(z - 1 - 2i)$ and the denominator is factored as $(z + 1)^2(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

Since h is a rational function, it is meromorphic on $\mathbf{C}$. The factorizations show that

- $z_1 = -1$ is a pole of order 1.
 - $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ is a pole of order 2.
 - $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ is a pole of order 2.
-

3. Determine the zeroes of h and their orders.

Solution

Using the results from the previous part, one can write

$$h(z) = \frac{z - 1 - 2i}{(z + 1)(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

Thus $1 + 2i$ is the only zero of h and it is of order 1.

4. Let γ denote the circuit given by the triangle with corners in the points 0 , $-2+2i$, og $-2-2i$, traversed once with positive orientation. Sketch the circuit in the complex plane and compute the integral

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

Solution _____

The only pole inside the triangle is $z_1 = -1$, and it is a simple pole.

$$\text{Res}(h(z), -1) = \frac{-1 - 1 - 2i}{(-1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2(-1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-2 - 2i}{9}$$

Thus

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \frac{-2 - 2i}{9} = \frac{4\pi - i4\pi}{9}.$$

5. Let $\partial B(0, 2)$ denote the circuit consisting of the circle with center in 0 and radius 2 , traversed once with positive orientation. Compute the integral

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$

Solution _____

All three poles are inside the circle, and the zero is outside. Thus

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 2\pi i(-1 - 2 - 2) = -10\pi i.$$
