MATEMATIK-STUDERENDE

Første studieår
Introduktion til matematiske metoder

Skriftlig prøveeksamen

januar 2012
med korte svar

Dato: selvvalgt
Tidspunkt: varighed 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 6 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.
Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -24 \cdot 2^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

Karakteristisk ligning $r^2 - 2r - 8 = 0$ med rødder -2 og 4. Fuldstændig løsning er

$$x_{\mathrm{h}}(n) = c_1(-2)^n + c_2 4^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

Gæt $y(n) = c2^n$ giver $x_{\mathrm{p}}(n) = 3 \cdot 2^n$

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_2 4^n + 3 \cdot 2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

$$x(n) = -(-2)^n - 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 2^n$$

(e) Vis, at $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2 + 2. \tag{2}$$

Indsæt $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2$ og regn ud:

$$(n+2)^2 - 2(n+1)^2 - 8n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2(n^2 + 2n + 1) - 8n^2 = -9n^2 + 2.$$

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2. \tag{3}$$

Vi bruger, at $-9n^2 = (-9n^2 + 2) - 2$ og finder først en partikulær løsning til

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -2$$

ved at gætte på $y(n) = c$, som giver $y(n) = \frac{2}{9}$. Dermed er $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2 + \frac{2}{9}$ en partikulær løsning til $x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2$ og den fuldstændfige løsning er

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_2 4^n + n^2 + \frac{2}{9}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = n3^n$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 3 \cdot 3^n.$$

Find den fuldstændige løsning til denne differensligning.

Vi sætter ind. Venstre side giver $(n+1)3^{n+1}$, og højre side giver

$$3n3^n + 3 \cdot 3^n = (n+1)3^{n+1},$$

som er det samme, så det er en partikulær løsning. Den fuldstændige løsning til $x(n+1) = 3x(n)$ er $x(n) = c3^n$, $c \in \mathbf{R}$, så den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er

$$x(n) = c3^n + n3^n, \quad c \in \mathbf{R}.$$

(b) Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 8x(n+1) + 32x(n) = f(n).$$

Bestem en følge $f(n)$, således at følgen $x_{\mathrm{p}}(n) = 2^{n-1}$ er en partikulær løsning til differensligningen.

Indsæt på venstre side og regn ud:

$$2^{n+2-1} - 8 \cdot 2^{n+1-1} + 32 \cdot 2^{n-1} = (2 - 8 + 16)2^n = 10 \cdot 2^n$$

således, at svaret er $f(n) = 10 \cdot 2^n$

(c) Er de tre følger

$$x_1(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_2(n) = \frac{n}{n+1}, \quad x_3(n) = 3, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

lineært uafhængige eller lineært afhængige? Svaret skal begrundes.

Vi har, at

$$3(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}) = 3,$$

således at

$$3x_1(n) + 3x_2(n) - x_3(n) = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbf{N}_0.$$

Det viser iflg. definitionen, at de tre følger er lineært afhængige.

Hvis man bruger Casoratideterminanten, så skal man huske, at for at vise lineær afhængighed, så skal man vise $W(n) \neq 0$ *for alle* $n \in \mathbf{N}_0$!

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering.

(a) Betragt følgende problem, hvor c er et reelt tal, med $c \geq 3$.

Maksimér $cx_1 + x_2$

u.b.b.:

$3x_1 + x_2 \leq 3,$

$x_1 + x_2 \leq 3/2,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

og løs det ved hjælp af simplexmetoden. Bemærk, at både simplextabellerne, de variable der er i basis'erne og deres værdier, den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning skal angives.

---

x_1	x_2	x_3	x_4	M	
3	1	1	0	0	3
1	1	0	1	0	3/2
$-c$	-1	0	0	1	0

Basisvariable: $x_3 = 3$, $x_4 = 3/2$.

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	M	
1	1/3	1/3	0	0	1
0	2/3	-1/3	1	0	1/2
0	$c/3 - 1$	$c/3$	0	1	c

Basisvariable: $x_1 = 1$, $x_4 = 1/2$.

Optimal løsning er altså $x_1 = 1$ og $x_2 = 0$, optimalværdi $= M = c$.

(b) Angiv skyggeprisen for kapacitetsbegrænsningen $3x_1 + x_2 \leq 3$.

Skyggeprisen er lig med $c/3$.

(c) Opskriv det duale problem og løs dette grafisk, afhængig af hvad c er.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimér } 3y_1 + 3/2y_2 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&3y_1 + y_2 \geq c, \\
&y_1 + y_2 \geq 1, \\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

På en (y_1, y_2) graf ses det, at løsningen er $y_1 = c/3$ og $y_2 = 0$ for $c \geq 3$.

(d) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimér } 2(x_1 - 1) + x_2 - 1 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&x_1^2 \leq 9, \\
&-x_1 + 2x_2 \leq 4, \\
&\tfrac{x_1}{x_2} \leq 3, \\
&x_1 \geq 0, x_2 > 0.
\end{aligned}$$

(e) Løs dette problem grafisk.

Løsningen til følgende LP løser det oprindelige problem, når 3 fratrækkes den optimale værdi.

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimér } 2x_1 + x_2 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&x_1 \leq 3, \\
&-x_1 + 2x_2 \leq 4, \\
&x_1 - 3x_2 \leq 0, \\
&x_1 \geq 0, x_2 > 0.
\end{aligned}$$

Fra en (x_1, x_2) graf ses det, at den optimale løsning er $x_1 = 3$ og $x_2 = 3\frac{1}{2}$. Optimal værdi er $2 \cdot 3 + 3\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$. Løsningen til det oprindelige problem er derfor $6\frac{1}{2}$.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -3x_1(n) - 2x_2(n), \\ x_2(n+1) &= x_1(n). \end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n \geq 1$.

Vi bruger Putzersalgoritme. Egenværdierne for A bestemmes:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

giver $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$.

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(-1)^n - (-2)^n}{-1-(-2)} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-2)^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 2$ og $x_2(0) = -2$.

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -3x_1(n) - 2x_2(n) + 6, \\ x_2(n+1) &= x_1(n) + 3. \end{aligned}$$

Vi gætter på en konstant vektor som en partikulær løsning. Indsætning giver

$$\begin{aligned} y_1 &= -3y_1 - 2y_2 + 6 \\ y_2 &= y_1 + 3 \end{aligned}$$

Det giver

$$\mathbf{x}_{\mathrm{p}}(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Den fuldstændige løsning kan da skrives som

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + (-2)^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

for alle $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$.