

MATEMATIK-STUDERENDE
Første studieår
Introduktion til matematiske metoder
Skriftlig prøveeksamen
januar 2012

Dato: selvvalgt

Tidspunkt: varighed 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -24 \cdot 2^n. \quad (1)$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.
- (b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).
- (c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).
- (d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

- (e) Vis, at $x_p(n) = n^2$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2 + 2. \quad (2)$$

- (f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2. \quad (3)$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

- (a) Vis, at

$$x(n) = n3^n$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 3 \cdot 3^n.$$

Find den fuldstændige løsning til denne differensligning.

- (b) Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 8x(n+1) + 32x(n) = f(n).$$

Bestem en følge $f(n)$, således at følgen $x_p(n) = 2^{n-1}$ er en partikulær løsning til differensligningen.

- (c) Er de tre følger

$$x_1(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_2(n) = \frac{n}{n+1}, \quad x_3(n) = 3, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

lineært uafhængige eller lineært afhængige? Svaret skal begrundes.

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering.

- (a) Betragt følgende problem, hvor c er et reelt tal, med $c \geq 3$.

Maksimér $cx_1 + x_2$

u.b.b.:

$$3x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3/2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

og løs det ved hjælp af simplexmetoden. Bemærk, at både simplextabellerne, de variable der er i basis'erne og deres værdier, den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning skal angives.

- (b) Angiv skyggeprisen for kapacitetsbegrænsningen $3x_1 + x_2 \leq 3$.
- (c) Opskriv det duale problem og løs dette grafisk, afhængig af hvad c er.
- (d) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

Maksimér $2(x_1 - 1) + x_2 - 1$

u.b.b.:

$$x_1^2 \leq 9,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$\frac{x_1}{x_2} \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 > 0.$$

- (e) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$x_1(n+1) = -3x_1(n) - 2x_2(n),$$

$$x_2(n+1) = x_1(n).$$

- (a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A , således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.
- (b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n \geq 1$.
- (c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 2$ og $x_2(0) = -2$.
- (d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$x_1(n+1) = -3x_1(n) - 2x_2(n) + 6,$$

$$x_2(n+1) = x_1(n) + 3.$$

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \quad (4)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (5)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2). \quad (6)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta). \quad (7)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (8)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \quad (9)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \quad (10)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \quad (11)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \quad (12)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta). \quad (13)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta). \quad (14)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \quad (15)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \quad (16)$$