

MATEMATIK-ØKONOMI-STUDERENDE

Første studieår

Introduktion til matematiske metoder i økonomi

Skriftlig prøveeksamen

januar 2011  
med korte svar

**Dato:** selvvalgt

**Tidspunkt:** varighed 4 timer

**Tilladte hjælpemidler:** Lærebøger, notater mv. må medbringes.

**Ikke tilladte hjælpemidler:** Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Opgavesættet** findes på de følgende 6 sider.

**Vedrørende besvarelse:** Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

**Opgave 1.** Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n + 2) - 2x(n + 1) - 8x(n) = -24 \cdot 2^n. \quad (1)$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

---

Karakteristisk ligning  $r^2 - 2r - 8 = 0$  med rødder  $-2$  og  $4$ . Fuldstændig løsning er

$$x_h(n) = c_1(-2)^n + c_24^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$


---

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

---

Gæt  $y(n) = c2^n$  giver  $x_p(n) = 3 \cdot 2^n$

---

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

---


$$x(n) = c_1(-2)^n + c_24^n + 3 \cdot 2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$


---

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$


---

$$x(n) = -(-2)^n - 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 2^n$$


---

(e) Vis, at  $x_p(n) = n^2$  er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n + 2) - 2x(n + 1) - 8x(n) = -9n^2 + 2. \quad (2)$$


---

Indsæt  $x_p(n) = n^2$  og regn ud:

$$(n + 2)^2 - 2(n + 1)^2 - 8n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2(n^2 + 2n + 1) - 8n^2 = -9n^2 + 2.$$


---

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2. \quad (3)$$

Vi bruger, at  $-9n^2 = (-9n^2 + 2) - 2$  og finder først en partikulær løsning til

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -2$$

ved at gætte på  $y(n) = c$ , som giver  $y(n) = \frac{2}{9}$ . Dermed er  $x_p(n) = n^2 + \frac{2}{9}$  en partikulær løsning til  $x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2$  og den fuldstændige løsning er

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_24^n + n^2 + \frac{2}{9}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

**Opgave 2.** Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = n3^n$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 3 \cdot 3^n.$$

Find den fuldstændige løsning til denne differensligning.

Vi sætter ind. Venstre side giver  $(n+1)3^{n+1}$ , og højre side giver

$$3n3^n + 3 \cdot 3^n = (n+1)3^{n+1},$$

som er det samme, så det er en partikulær løsning. Den fuldstændige løsning til  $x(n+1) = 3x(n)$  er  $x(n) = c3^n$ ,  $c \in \mathbf{R}$ , så den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er

$$x(n) = c3^n + n3^n, \quad c \in \mathbf{R}.$$

(b) Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 8x(n+1) + 32x(n) = f(n).$$

Bestem en følge  $f(n)$ , således at følgen  $x_p(n) = 2^{n-1}$  er en partikulær løsning til differensligningen.

Indsæt på venstre side og regn ud:

$$2^{n+2-1} - 8 \cdot 2^{n+1-1} + 32 \cdot 2^{n-1} = (2 - 8 + 16)2^n = 10 \cdot 2^n$$

således, at svaret er  $f(n) = 10 \cdot 2^n$

(c) Er de tre følger

$$x_1(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_2(n) = \frac{n}{n+1}, \quad x_3(n) = 3, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

lineært uafhængige eller lineært afhængige? Svaret skal begrundes.

Vi har, at

$$3\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) = 3,$$

således at

$$3x_1(n) + 3x_2(n) - x_3(n) = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbf{N}_0.$$

Det viser iflg. definitionen, at de tre følger er lineært afhængige.

Hvis man bruger Casoratideterminanten, så skal man huske, at for at vise lineær afhængighed, så skal man vise  $W(n) \neq 0$  for alle  $n \in \mathbf{N}_0$ !

**Opgave 3.** Denne opgave omhandler lineær programmering.

(a) Betragt følgende problem, hvor  $c$  er et reelt tal, med  $c \geq 3$ .

Maksimér  $cx_1 + x_2$

u.b.b.:

$$3x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3/2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

og løs det ved hjælp af simplexmetoden. Bemærk, at både simplextabellerne, de variable der er i basis'erne og deres værdier, den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning skal angives.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$M$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$M$	
3	1	1	0	0	3	1	1/3	1/3	0	0	1
1	1	0	1	0	3/2	0	2/3	-1/3	1	0	1/2
$-c$	-1	0	0	1	0	0	$c/3 - 1$	$c/3$	0	1	$c$

Basisvariable:  $x_3 = 3, x_4 = 3/2$ .                      Basisvariable:  $x_1 = 1, x_4 = 1/2$ .

Optimal løsning er altså  $x_1 = 1$  og  $x_2 = 0$ , optimalværdi  $= M = c$ .

- (b) Angiv skyggeprisen for kapacitetsbegrænsningen  $3x_1 + x_2 \leq 3$ .

Skyggeprisen er lig med  $c/3$ .

- (c) Opskriv det duale problem og løs dette grafisk, afhængig af hvad  $c$  er.

Minimér  $3y_1 + 3/2y_2$

u.b.b.:

$$3y_1 + y_2 \geq c,$$

$$y_1 + y_2 \geq 1,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,$$

På en  $(y_1, y_2)$  graf ses det, at løsningen er  $y_1 = c/3$  og  $y_2 = 0$  for  $c \geq 3$ .

- (d) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

Maksimér  $2(x_1 - 1) + x_2 - 1$

u.b.b.:

$$x_1^2 \leq 9,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$\frac{x_1}{x_2} \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 > 0.$$

- (e) Løs dette problem grafisk.

Løsningen til følgende LP løser det oprindelige problem, når 3 fratrækkes den optimale værdi.

Maksimér  $2x_1 + x_2$

u.b.b.:

$$x_1 \leq 3,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 > 0.$$

Fra en  $(x_1, x_2)$  graf ses det, at den optimale løsning er  $x_1 = 3$  og  $x_2 = 3\frac{1}{2}$ . Optimal værdi er  $2 \cdot 3 + 3\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$ . Løsningen til det oprindelige problem er derfor  $6\frac{1}{2}$ .

**Opgave 4.** Denne opgave omhandler basal mikroøkonomi. En forbruger har nyttefunktionen  $U(x_1, x_2) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 16x_2$ , hvor  $x_1 > 0$  og  $x_2 > 0$ , når hun forbruger  $x_1$  enheder af æbler og  $x_2$  enheder af appelsiner. Forbrugeren har et budget på 32 at spendere på æbler og appelsiner. Hvert æble og hver appelsin koster 4.

- (a) Bestem marginalnyttten af æbler og marginalnyttten af appelsiner.

$$MU_1 = -2x_1 + 4, \quad MU_2 = -2x_2 + 16$$

- (b) Bestem det marginale substitutionsforhold (MRS) mellem de to varer.

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2x_1 - 4}{-2x_2 + 16}, \text{ for } x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0.$$

- (c) Opskriv forbrugeren budgetbegrænsning, og brug denne til at finde forbruget  $x_2$  af appelsiner som funktion af forbruget  $x_1$  af æbler.

$$4x_1 + 4x_2 \leq 32, \text{ og } x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0.$$

og derfor

$x_2 = 8 - x_1$ , når alle 32, som det antages, bruges. Bemærk, at  $x_1$  og  $x_2$  ligger mellem 0 og 8.

- (d) Hvis forbrugeren vil maksimere sin nytte, hvordan kan hun så bruge informationen fra spørgsmål (c) til at finde den optimale kombination af  $x_1$  og  $x_2$ ?

Ved at indsætte i nyttefunktionen:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2(x_1)) &= -x_1^2 + 4x_1 - (8 - x_1)^2 + 16(8 - x_1) \\ &= -2x_1^2 + 4x_1 + 64. \end{aligned}$$

Denne maksimeres så mht.  $0 < x_1 < 8$ .

- (e) Find den optimale kombination af  $x_1$  og  $x_2$ .
- 

Fås ved at maksimere ovenstående 2. gradspolynomium.

$$-4x_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Den optimale kombination er  $x_1 = 1$  og  $x_2 = 7$  (altså ét æble og syv appelsiner). Denne kombination ses ved kontrol at maksimere ovennævnte 2. gradspolynomium.

---