Kursusgang M14, 9. december 2011, 12:30–16:15
Jeg refererer til noterne som [AJ-v1].

Dagens program

1. 12:30–14:00 i A315. Jeg gennemgår resten af afsnit 8 i [AJ-v1]. Det omhandler systemer af første ordens differensligninger. Vægten er på Putzers algoritme og eksempler på anvendelse af denne.

2. 14:00–16:15 i grupperum. Regn opgaverne på nedenstående liste. Under gruppearbejdet besvarer jeg også spørgsmål vedr. kurset og tidligere opgaver.

Opgaver

1. Gennemgå Example 8.6. i [AJ-v1] i detaljer.

2. Exercise 8.4.

3. Gennemlæs sidste del af afsnit 8 i [AJ-v1].

4. Exercise 8.5.

5. I denne opgave arbejder vi lidt videre med sammenhængen mellem en homogen anden ordens differensligning og det tilhørende system af første ordens ligninger. Anden ordens ligningen er givet som

$$x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0. \tag{1}$$

Det tilhørende system er i variablene

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), \\ x_2(n) &= x(n+1), \end{aligned}$$

og er givet ved

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \quad \text{hvor} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Her er

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{bmatrix}$$

præcis som i noterne.

Vi skal nu se på *to løsninger* til anden ordens ligningen (1) og forbindelsen med de tilhørende løseninger til første ordens systemet. Notationen er, at vi betegner de to løsninger med henholdsvis $x(n)$ og $y(n)$. De tilhørende vektorløsninger til første ordens systemet (2) betegnes med henholdsvis $\mathbf{x}(n)$ og $\mathbf{y}(n)$. Som i noterne er

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \end{bmatrix}.$$

Vi definerer en matrix følge

$$\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(n) \;\; \mathbf{y}(n)] = \begin{bmatrix} x(n) & y(n) \\ x(n+1) & y(n+1) \end{bmatrix}.$$

Vis, at der gælder

$$\mathbf{X}(n+1) = A\mathbf{X}(n).$$

Husk på hvordan matrixmultiplikation virker. Observér, at Casorati determinanten for de to løsninger $x(n)$ og $y(n)$ kan skrives som

$$W(n) = \det \mathbf{X}(n).$$

Brug sammenhængen mellem matrixmultiplikation og determinanter til at vise, at

$$W(n+1) = cW(n),$$

og dermed, at

$$W(n) = c^n W(0).$$

Sammenlign dette resultat med Lemma 5.5 i noterne.

Overvej, at vi med ovenstående har vist, at to løsninger $\mathbf{x}(n)$ og $\mathbf{y}(n)$ til systemet (2) leder til to lineært uafhængige løsninger til anden ordens ligningen (1), hvis og kun hvis begyndelsesdata $\mathbf{x}(0)$ og $\mathbf{y}(0)$ er lineært uafhængige vektorer i $\mathbf{R}^2$.

Arne Jensen