Kursusgang 13, 17. oktober 2011, 12:30–16:15

Denne gang er det **selvstudium**.

Program Forslaget til program er følgende:

1. Gennemarbejd Example 11.4.4 og 11.4.5. Gennemarbejd eksemplerne nedenfor vedrørende diagonalisering.
2. Fra [LNS] Chapter 11, Calculational exercises 2, 3, 1, 4, 5, 6. Regn opgaverne i den angivne rækkefølge. Der er en facitliste til exercise 2 sidst i denne oversigt.

Kommentar til exercise 2 og 3: Formålet med programmet i dag er at sikre, at I kan gennemføre diagonalisering ved regning med komplekse tal. Der er to aspekter her. Det ene er at kunne regne korrekt med komplekse tal (husk *konjugeringen* i definitionen af det indre produkt på $\mathbf{C}^n$), og det andet er at kunne kombinere de forskellige aspekter af lineær algebra, der indgår i en diagonalisering. Eksemplerne 11.4.4 og 11.4.5 viser hvordan det gennemføres. Jeg giver endnu et eksempel nedenfor. Der er også nogle kommentarer vedrørende exercise 3.

Eksempel på diagonalisering. Her er et eksempel, der kræver en del udregninger med komplekse tal. Jeg skriver ikke alle detaljerne. I skal selv gennemføre de manglende udregninger. Vi ser på matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Vi har, at

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix}.$$

Heraf fremgår det, at A ikke er selvadjungeret (Hermitisk), da $A^* \neq A$. En udregning viser, at $AA^* = A^*A$, således at A er normal. Vi kan derfor anvende spektralsætningen, og vi kan diagonalisere den. Første trin er at finde egenværdierne. Det gør vi ved hjælp af det karakteristiske polynomium,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (2+2i)\lambda + 4i.$$

Rødderne i andengradspolynomiet $p(\lambda)$ er 2 og $2i$. For at bestemme den unitære matrix, der diagonaliserer A, skal vi bestemme de tilhørende egenvektorer. Vi ser først på $\lambda_1 = 2$. Vi skal løse systemet $(A - 2I)v = 0$. Koefficientmatricen er

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1+i-2 & -1-i \\ 1+i & 1+i-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}.$$

Vi multiplicerer første række med i og lægger til anden række. Resultatet er

$$\begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi vælger anden komponent til 1. Det giver en egenvektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende udregninger giver for egenværdien $\lambda_2 = 2i$ en egenvektor

$$v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan kontrollere, om man har regnet rigtigt, ved at checke at de to egenvektorer er ortogonale:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = -i \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{1} = -1 + 1 = 0.$$

En udregning giver, at $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{2}$. Vi har derfor, at den unitære matrix, som giver diagonaliseringen, er givet ved

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Diagonaliseringsresultatet kan så skrives som $U^*AU = D$, hvor

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

Vi kan skrive den ud med matricerne som

$$\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & -1-i \\ 1+i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

Diagonalisering i det generelle tilfælde. Her er et par eksempler på den generelle diagonalisering, dvs for ikke-normale afbildninger. Her er spørgsmålet først at undersøge, om der er lige så mange lineært uafhængige egenvektorer som dimensionen af rummet. Hvis svaret er ja, så kan matricen diagonaliseres. Hvis svaret er nej, så kan matricen *ikke* diagonaliseres. Vi ser først på et eksempel på en reel matrix, som afbilding på $\mathbf{R}^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Man kan se ved direkte udregning, at denne matrix ikke er normal. Det er en nedre trekantsmatrix, så den eneste egenværdi er $\lambda = 1$. Vi bestemmer egenvektorerne ved at løse det homogene ligningssystem $(A - 1I)v = 0$. Koefficientmatricen er

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{der reduceres til} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Heraf ses, at der er én fri variabel, og en basis for egenrummet $\mathrm{null}(A - 1I)$ er givet ved $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenrummet er en-dimensionalt, så derfor kan A ikke diagonaliseres.

Vi ser dernæst på følgende eksempel fra $\mathbf{R}^{3\times 3}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Det er igen en nedre trekantsmatrix, så vi kan direkte aflæse egenværdierne. Vi har egenværdierne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Vi bestemmer nu egenvektorer. Først for $\lambda_1 = 1$. Koefficientmatricen for $(B - 1I)v = 0$ er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{der reduceres til} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Heraf får vi, at en basis for $\text{null}(B - 1I)$ er givet ved

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Denæst ser vi på $\lambda_2 = 2$. Koefficientmatricen for $(B - 2I)v = 0$ er

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{der reduceres til} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Heraf fås, at en basis for $\text{null}(B - 2I)$ er

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har fundet egenvektorer (v_1, v_2, v_3), som er lineært uafhængige (det følger enten af teorien eller ved en direkte udregning). De er derfor en basis for $\mathbf{R}^3$, og B kan derfor diagonaliseres. Diagonaliseringen er givet ved $P^{-1}BP = D$, hvor

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Søjlerne i P er egenvektorerne, opskrevet i samme rækkefølge som de tilhørende egenværdier i diagonalen af D.

Facitliste til exercise 2 Facit er beregnet i Maple. Den første vektor består af egenværdierne, og søjlerne i den anden matrix er tilhørende egenvektorer.

(a) $\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1-i}{1-\sqrt{3}} & \frac{1-i}{1+\sqrt{3}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+i & -1/2-1/2\,i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/5-1/5\,i & 3/2+1/2\,i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1/2+1/2\,i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Arne Jensen