

Kursusgang 16, 24. oktober 2011, 12:30–16:15

Denne gang er det **selvstudium**.

Program Forslaget til program er følgende:

1. Lav en skriftlig besvarelse af alle opgaverne i Opgavesamling 1. Der vil senere blive lagt en eksemplarisk besvarelse på hjemmesiden, som I kan sammenligne egne besvarelser med. Eventuelle spørgsmål besvares i Kursusgang 17.
2. Regn nedenstående opgave. Vi skal bruge resultaterne senere i kurset.
3. Som forberedelse til Kursusgang 17 repeteres regneteknik for partielle afledede. Se [AE], Chapter 12 (calculus lærebogen fra forår 2011). I skal også indse, at I nu i forbindelse med gennemgangen af [WRW], Chapter 4, har gennemgået beviserne for disse resultater.

Opgave I denne opgave skal I først bevise et resultat vedrørende diagonalisering af symmetriske reelle matricer, og derefter anvende resultatet til analyse af kvadratiske former.

1. Vis følgende resultat:

Sætning. Lad $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ være en symmetrisk matrix, dvs $A^T = A$. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ være egenverdierne for A . Lad D betegne diagonalmatricen med egenverdierne i diagonalen. Så findes en ortogonal matrix S , således at

$$S^T A S = D. \quad (1)$$

Søjlerne i S udgør en ortonormal basis for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer for A .

Hints: Man kan bruge spektralsætningen for normale operatorer, idet der jo også gælder, at $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, og at det er en hermitisk matrix (en normal operator). Man skal så vise, at egenvektorerne kan vælges med kun reelle indgange. Det argument findes i noterne vedrørende differensligninger fra efteråret 2010. Præcis samme argument kan anvendes her.

2. Vi har givet en kvadratisk form i to variable

$$q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, \quad x \in \mathbf{R}^2. \quad (2)$$

Vi antager, at mindst et af tallene a, b, c er forskellig fra nul. Vis, at der findes en ortogonal matrix T , og tal α, β , således at

$$q(Ty) = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2, \quad y \in \mathbf{R}^2. \quad (3)$$

Variabelskiftet $x = Ty$ siges at bringe q på *normalform*.

Hint: Se beviset i [SIF].

3. Generaliser ovenstående resultat til en kvadratisk form i n variable,

$$q(x) = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + \dots + a_{1,n}x_1x_n + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n}x_n^2, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (4)$$

Det er en god idé at starte med $n = 3$ og $n = 4$ for at se hvad strukturen af den kvadratiske form er.

Arne Jensen