Kursusgang 3, 15. september 2011, 12:30–16:15

Program

1. 12:30–14:30. Forelæsning i G5-112. Jeg gennemgår Chapter 6 i [LNS], som omhandler lineære afbildninger (lineære transformationer) og deres matricer. I har set mange af resultaterne i mere konkret form i [SIF]. Denne forelæsning forudsætter, at man har sat sig grundigt ind i resultaterne i Chapter 5 om basis og dimension.

2. 14:30–16:15. Opgaveregning i grupperne. Se opgavelisten nedenfor.

Opgaver Løs opgaverne i den angivne rækkefølge

1. Examples 5.2.3 og 5.2.4 gennemgås i detaljer. Det er vigtigt at forstå, at mange opgaver vedrørende lineær (u)afhængighed kan formuleres som resultater og udsagn vedrørende lineære ligningssystemer, som så skal løses. Det er vigtigt at lære selv at opstille disse lineære ligningssystemer og så løse dem med de metoder, I har lært i [SIF].

2. Chapter 5, Calculational Exercises 1, 2, 3, 4, 5. Alle disse opgaver kan løses ved enten at opstille lineære ligningssystemer og løse dem, eller ved at anvende sætninger fra Chapter 5. Se eksempler nedenfor.

3. Chapter 5, Proof-Writing Exercises 1, 2.

4. Opgave vedrørende forståelse af teorien i Chapter 5. Nedenfor er nogle udsagn om endeligdimensionale vektorrum. For hvert udsagn skal man afgøre, om det er sandt eller falsk. Man skal begrunde hvert svar ved at henvise til resultater fra Chapter 5, eller ved at give modeksempler. Der er givet et vektorrum V over skalarlegemet $\mathbf{F}$ med $\dim V = n$.

   (a) Enhver lineært uafhængig liste af vektorer har højst længde n.

   (b) Enhver frembringende liste af vektorer har mindst længde n.

   (c) Enhver liste med længde $k > n$ er lineært afhængig.

   (d) Enhver liste med længde $k < n$ er lineært uafhængig.

   (e) Enhver liste med længde n er en basis for V.

Eksempler Jeg giver nogle eksempler på opgaver og deres besvarelse ved hjælp af sætninger fra Chapter 5.

1. **Opgave**: Der er givet vektorerne $v_1 = (i, 2, -3)$, $v_2 = (0, 2, 2)$, $v_3 = (1 + i, 2 + i, 3 + i)$, $v_4 = (0, 0, 1)$ i $\mathbf{C}^3$. Afgør, om disse vektorer er lineært afhængige eller lineært uafhængige i det komplekse vektorrum $\mathbf{C}^3$.

   Besvarelse: Den første mulighed er at undersøge løsningerne til ligningen

   $$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0.$$

   Den kan skrives som et homogent lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med fire ubekendte. Det er vigtigt at observere, at man *ikke* skal give sig til at løse dette ligningssystem. Vi ved fra teorien for lineære ligningssystemer, at et homogent ligningssystem, hvor antallet af ubekendte er større end antallet af ligninger altid har en ikke-triviel løsning, så at vektorerne er lineært afhængige. Sagt på en anden måde, koefficientmatricen er en 3×4 matrix. Det maksimale antal pivotindgange i den reducerede echelonform er 3. Så der er altid mindst én fri variabel.

Den anden mulighed er følgende generelle betragtning. Det komplekse vektorrum $\mathbf{C}^3$ har dimension 3 (Example 5.3.2). I et tre-dimensionalt vektorrum er 4 eller flere vektorer altid lineært afhængige. Sagt på en anden måde, hvis fire vektorer er lineært uafhængige, så er dimensionen af det vektorrum de tilhører mindst 4.

2. **Opgave**: Bestem dimensionen af følgende underrum af $\mathbf{C}_4[z]$

$$U = \{p(z) \in \mathbf{C}_4[z] \,|\, p(z) = a_2 z^2 + a_4 z^4,\ a_2, a_4 \in \mathbf{C}\}.$$

Besvarelse: For at bestemme dimensionen af et vektorrum skal vi bestemme en basis for rummet. Det er klart fra definitionen, at

$$U = \operatorname{span}(z^2, z^4).$$

Vi mangler at vise, at (z^2, z^4) er lineært uafhængige. Antag, at $az^2 + bz^4 = 0$. Denne ligning skal gælde for alle $z \in \mathbf{C}$, men så giver resultater fra teorien for polynomier (et polynomium af grad fire har højst fire forskellige rødder), at $a = b = 0$, og vektorerne er derfor lineært uafhængige. Alternativt, så kan man bruge, at vi fra Example 5.2.5 ved, at $(1, z, z^2, z^3, z^4)$ er lineært uafhængige. Men en delliste af en lineært uafhængig liste er lineært uafhængig. Vi konkluderer, at dimensionen af U er lig 2.

Arne Jensen