

**Kursusgang 9, 5. oktober 2011, 08:13–12:00**

Denne gang er det **selvstudium**.

**Program** Forslaget til program er følgende:

1. I skal repetere resultaterne vedrørende determinanter fra [SIF, Chapter 3]. Bemærk, at alle resultaterne også gælder for komplekse tal.
2. Sammenlign disse resultater med resultaterne fra afsnittene 8.2.2, 8.2.3, og 8.2.4 i [LNS].
3. Resterende opgaver fra tidligere kursusgange.
4. Opgaverne 1 og 2 nedenfor. Det er noget sværere opgaver end de sædvanlige i [LNS].

**Kommentarer til programmet:** Det er vigtigt at I kan regne med determinanter, både for reelle og komplekse matricer. Vi skal bruge teknikkerne til at finde egenverdier for lineære afbildninger. Vi skal også bruge resultaterne i forbindelse med resultaterne for funktioner af flere variable i anden del af kurset.

Resultaterne vedrørende permutationer og beviserne vedrørende determinanter er ikke en del af pensum i kurset. Men egenskaber ved determinanter og anvendelser af determinanter er en del af pensum.

**Opgaver**

1. Vis følgende resultat: Der er givet  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{F}$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Determinanten ovenfor kaldes Vandermonde determinanten. Forslag til løsning: Lav et induktionsbevis. Start med at se på  $n = 2$  og  $n = 3$ . Hvordan kan man få resultatet for  $n = 3$  ud fra resultatet for  $n = 2$ ? Hvis denne udregning ikke giver ideen til beviset, så prøv at se hvordan man kan få resultatet for  $n = 4$  ud fra resultatet for  $n = 3$ .

2. Der er givet tal  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{F}$ , og tal  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{F}$ , så at for  $i \neq j$  er  $x_i \neq x_j$ . Vis, at der findes præcis et polynomium  $p(z) \in \mathbf{F}_{n-1}[z]$ , således at  $p(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - (a) Løs denne opgave ved at bruge resultatet vedrørende Vandermonde determinanten ovenfor.
  - (b) Løs derefter opgaven ved følgende konstruktion: Definér polynomierne

$$\ell_i(z) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}. \quad (1)$$

Vis, at

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Definér

$$p(z) = \sum_{i=1}^n y_i \ell_i(z). \quad (3)$$

Vis, at der gælder  $p(x_i) = y_i$ . Vis derefter, at  $(\ell_1(z), \ell_2(z), \dots, \ell_n(z))$  udgør en basis for  $\mathbf{F}_{n-1}[z]$ .

Polynomierne  $\ell_i(z)$  kaldes Lagrange polynomier, og metoden til at bestemme  $p(z)$  kaldes Lagrange interpolation.

Arne Jensen