# Mat3 og MatØk3
# Linearitet og differentiabilitet

## Skriftlig prøveeksamen
## December 2011

Dato: December 2011

Tidspunkt:

Sted:

**Tilladte hjælpemidler:** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet:** Findes på de næste 2 (to) sider.

**Vedr. besvarelsen:** Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til bog og/noter, eller ved en kombination af disse.

**Opgave 1.** Lad $\{e_1, e_2, e_3\}$ være den kanoniske basis for $\mathbf{R}^3$. En lineær afbildning $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ er givet ved

$$Te_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad Te_2 = -e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad Te_3 = 2e_2 - e_2 - e_3.$$

1. Bestem matricen for $T$ med hensyn til den kanoniske basis i $\mathbf{R}^3$.
2. Bestem en basis for null$(T)$. Angiv dimensionen af null$(T)$.
3. Bestem en basis for range$(T)$. Angiv dimensionen af range$(T)$.
4. Find matricen med hensyn til den kanonisk basis for afbildningen $Q \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, der er bestemt ved
$$Qe_1 = e_2,\ Qe_2 = e_1,\ Qe_3 = 0.$$
5. Findes der en lineær afbildning $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, således at
$$TS = Q?$$
Hvis svaret er *ja*, så skal man bestemme en sådan afbildning. Hvis svaret er *nej*, så skal man begrunde, at der ikke findes en sådan afbildning.

**Opgave 2.** Der er givet to lister af vektorer i et vektorrum $V$ med $\dim V = 4$:

$$\{u_1, u_2, u_3\} \quad \text{og} \quad \{v_1, v_2, v_3\}$$

Listen $\{u_1, u_2, u_3\}$ er lineært uafhængig, og listen $\{v_1, v_2, v_3\}$ er lineært afhængig.

1. For hver af følgende lister skal man afgøre, om den er lineært uafhængig eller lineært afhængig, eller om er findes eksempler, så at den både kan være lineært afhængig og lineært uafhængig. I alle tilfælde skal svaret begrundes. Hvis listen kan være både lineært afhængig og lineært uafhængig, så skal man give eksempler på begge tilfælde.
   (a) $\{u_1, u_2\}$.
   (b) $\{v_1, v_2\}$
   (c) $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$.
   (d) $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.
2. Sæt $W = \text{span}(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$. Bestem den størst mulige værdi af $\dim W$. Bestem også den mindste mulige værdi af $\dim W$.
3. Sæt $U = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ og $X = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Bestem den størst mulige værdi af $\dim(U \cap X)$. Bestem også den mindste mulige værdi af $\dim(U \cap X)$.

**Opgave 3.** En $4 \times 4$ matrix $A$ er givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Bestem den adjungerede matrix $A^*$. Vis, at $A$ er normal.
2. Vis, at $A^4 = I$.
3. Vis, at $A$ er invertibel, og bestem $A^{-1}$.
4. Bestem egenværdier for $A$.
5. Bestem en unitær matrix $U$ og en diagonalmatrix $D$ med egenværdierne i diagonalen, således at $U^{-1}AU = D$.

**Opgave 4.** En funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Vis, at $f$ er differentiabel på $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Vis, at de partielle afledede
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$
eksisterer, og bestem deres værdier.
3. Er $f$ differentiabel i $(0,0)$?
4. Find alle kritiske punkter for $f$.
5. Bestem de globale minimums- og maksimumspunkter for $f$ på mængden
$$M = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$
Bestem også de globale minimums- og maksimumsværdier for funktionen på $M$.
6. Har $f$ et globalt maksimum og/eller et globalt minimum på $\mathbf{R}^2$? Hvis *ja*, så bestemmes værdien/værdierne.