Version med svar. Opgavesamling 1 er gentaget, med svar indsat. Bemærk, at der sagtens kan være mange andre korrekte besvarelser af opgaverne.

Nedenfor er nogle eksempler på teoriopgaver af en type, som kan blive stillet til den skriftlige eksamen. Nedenfor er *alle vektorrum endelig dimensionale* over $\mathbf{F}$. Denne antagelse vil ikke blive gentaget i opgaveteksten.

Bemærk, at nogle teoriopgaver kun kræver anvendelse af resultater fra bogen, mens andre teoriopgaver kræver en kombination af anvendelse af teorien og udregninger, f. eks. løsning af et lineært ligningssysytem, som man selv skal opstille.

1. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen

$$(v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_4, 2v_3 + v_4)$$

lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

Besvarelse: Vi ser på en linearkombination

$$a_1(v_1 + v_2 + v_3) + a_2(v_1 - v_4) + a_3(2v_3 + v_4) = 0$$

der omskrives til

$$(a_1 + a_2)v_1 + a_1v_2 + (a_1 + 2a_3)v_3 + (a_3 - a_2)v_4 = 0.$$

Da (v_1, v_2, v_3, v_4) er lineært uafhængige, følger, at

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_3 = 0, \quad a_3 - a_2 = 0.$$

Det ses umiddelbart, at løsningen til dette ligningssystem er

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Heraf følger, at listen $(v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_4, 2v_3 + v_4)$ er lineært uafhængig.

2. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen

$$(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_3 + v_1)$$

lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

Besvarelse: Vi ser på en linearkombination

$$a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + a_3(v_3 + v_4) + a_4(v_3 + v_1) = 0$$

og omskriver den til

$$(a_1 + a_4)v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + (a_2 + a_3 + a_4)v_3 + a_3v_4 = 0.$$

Da (v_1, v_2, v_3, v_4) er lineært uafhængige, følger, at

$$a_1 + a_4 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Vi opskriver koefficientmatricen for dette homogene ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi reducer ved rækkeoperationer indtil vi kan aflæse antallet af pivotindgange. Resultatet er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Da der er fire pivotindgange, er løsningen til dette ligningssystem

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$

Heraf følger, at listen $(v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_4, 2v_3 + v_4)$ er lineært uafhængig.

3. Der er givet en liste af vektorer (v_1, v_2, v_3, v_4) i et vektorrum V. Antag, at denne liste er lineært uafhængig. Er listen

$$(v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 + v_4, v_3 - v_4)$$

lineært afhængig eller lineært uafhængig? Svaret skal begrundes!

Besvarelse: Vi ser på en linearkombination

$$a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_1 - v_2) + a_3(v_3 + v_4) + a_4(v_3 - v_4) = 0$$

og omskriver den til

$$(a_1 + a_2)v_1 + (a_1 - a_2)v_2 + (a_3 + a_4)v_3 + (a_3 - a_4)v_4 = 0.$$

Da (v_1, v_2, v_3, v_4) er lineært uafhængige, følger, at

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 - a_2 = 0, \quad a_3 + a_4 = 0, \quad a_3 - a_4 = 0.$$

Løsningen til dette ligningssystem ses at være

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$

Heraf følger, at listen $(v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_4, 2v_3 + v_4)$ er lineært uafhængig.

4. Der er givet et vektorrum V med $\dim V = 4$. Der er endvidere givet en liste med syv vektorer fra V,

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7).$$

Vektorerne er indbyrdes forskellige: $v_i \neq v_j$ for $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 7$. Vektorerne (v_1, v_2, v_3, v_4) er lineært uafhængige, og vektorerne (v_5, v_6, v_7) er lineært afhængige. Nedenfor er en række udsagn vedrørende disse vektorer. For hvert udsagn skal man begrunde en af følgende muligheder: (i) udsagnet er altid sandt, (ii) udsagnet er altid falsk, eller (iii) med de givne oplysninger kan man ikke afgøre, om udsagnet er sandt eller falsk.

(a) Listen (v_1, v_2, v_6, v_7) er lineært uafhængig.

Besvarelse: Tilfælde (iii). Hvis f. eks. $v_7 = 0$, er listen lineært afhængig. Hvis f. eks. vi bruger de kanoniske basisvektorer i $V = \mathbf{F}^4$ og vælger $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_4$, $v_5 = e_3 + e_4$, $v_6 = e_3$, $v_7 = e_4$, så er alle antagelser i opgaven opfyldt, og listen (v_1, v_2, v_6, v_7) er lineært uafhængig.

(b) Listen $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ er lineært uafhængig.

Besvarelse: Tilfælde (i). Enhver liste med fem vektorer i et fire dimensionalt vektorrum er lineært afhængige.

(c) Listen (v_1, v_2, v_4) er lineært uafhængig.

Besvarelse: Tilfælde (i). En delliste af en lineært uafhængig liste er altid lineært uafhængig.

(d) Listen (v_1, v_5, v_6, v_7) er lineært uafhængig.

Besvarelse: Tilfælde (i). En liste, der har en lineært afhængig delliste, er altid lineært afhængig.

5. Der er givet to lineære operatorer $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Vi antager, at begge operatorer er invertible. For hver af nedenstående operatorer skal man afgøre, om den altid er invertibel eller ej. I det første tilfælde skal man begrunde invertibilitet og angive den inverse. I den andet tilfælde skal man give et modeksempel på invertibilitet.

(a) ST^{-1}

Besvarelse: Invertibel. En udregning (udeladt her, men hører med i en fuld besvarelse) viser, at den inverse er TS^{-1}.

(b) $S^{-1} - T^{-1}$

Besvarelse: Ikke invertibel. Tag $S = I$ og $T = I$, identitetsafbildningen. Så er $S^{-1} - T^{-1} = 0$, som ikke er invertibel.

(c) S^2T

Besvarelse: Invertibel. En udregning (udeladt her, men hører med i en fuld besvarelse) viser, at den inverse er $T^{-1}S^{-1}S^{-1}$.

(d) $ST^{-1}S$

Besvarelse: Invertibel. En udregning (udeladt her, men hører med i en fuld besvarelse) viser, at den inverse er $S^{-1}TS^{-1}$.

6. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = m$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T ikke er surjektiv, og at $\dim \operatorname{range}(T) = 3$. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

(a) Hvad er den mindste værdi, som m kan have?

Besvarelse: Da $\dim \operatorname{range}(T) = 3$ og $\operatorname{range}(T)$ er et ægte underrum af W (T er ikke surjektiv), er den mindste værdi $m = 4$.

(b) Hvad er den mindste værdi, som n kan have?

Besvarelse: Da $\dim \operatorname{range}(T) = 3$, giver dimensionsformlen at $\dim V = \dim \operatorname{range}(T) + \dim \operatorname{null}(T) \geq 3$, og den mindste værdi er $n = 3$.

(c) For hvilke værdier af n gælder, at T er injektiv?

Besvarelse: Da $\dim \operatorname{range}(T) = 3$, giver dimensionsformlen, at $\dim \operatorname{null}(T) - 9$ medfører $n = 3$.

7. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = 4$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T er surjektiv. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

   (a) Hvad er den mindste værdi, som n kan have?

   Besvarelse: Da T er surjektiv, er $\dim \operatorname{range}(T) = 4$. Dimensionsformlen giver $\dim V = \dim \operatorname{range}(T) + \dim \operatorname{null}(T) \geq 4$, og den mindste værdi er $n = 4$.

   (b) Hvad er den største værdi, som n kan have?

   Besvarelse: Dimensionsformlen $\dim V = \dim \operatorname{range}(T) + \dim \operatorname{null}(T) \geq 4$, viser, at der ingen største værdi er. Ethvert $n \geq 4$ er muligt.

   (c) For hvilke værdier af n gælder, at T er injektiv?

   Besvarelse: Dimensionsformlen $\dim V = \dim \operatorname{range}(T) + \dim \operatorname{null}(T) \geq 4$, og $\dim \operatorname{null}(T) = 0$ giver svaret, at T er injektiv for $n = 4$.

8. Der er givet to vektorrum V og W med $\dim V = n$ og $\dim W = m$. Der er også givet en lineær afbilding $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Der gælder, at T er injektiv, og at $\dim \operatorname{range}(T) = 7$. Baseret på disse oplysninger skal følgende spørgsmål besvares. Der skal gives en begrundelse for hvert svar.

   (a) Hvad er den mindste værdi, som m kan have?

   Besvarelse: Da $\dim \operatorname{range}(T) = 7$ og $\operatorname{range}(T)$ er et underrum af W, er den mindste værdi $m = 7$.

   (b) Hvad er den største værdi, som m kan have?

   Besvarelse: Eneste begrænsning på W er givet ved $\dim \operatorname{range}(T) = 7$, så alle værdier $m \geq 7$ kan forekomme.

   (c) Hvad kan man sige om n?

   Besvarelse: Vi ved, $\dim \operatorname{range}(T) = 7$ og T er injegtiv, så at $\dim \operatorname{null}(T) = 0$. Dimensionsformlen giver $\dim V = \dim \operatorname{range}(T) + \dim \operatorname{null}(T) = 7 + 0 = 7$, så vi ved, at $n = 7$.