Mat3 og MatØk3
Linearitet og differentiabilitet

Skriftlig eksamen
23. januar 2013

Dato: 23. januar 2013

Tidspunkt: 08:30–12:30

Sted: G5-109 og G5-112

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Vedr. besvarelsen: Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1. Lad $V = \mathbf{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt. Der er givet to vektorer

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi sætter $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$.

1. Bestem en ortonormal basis for U.
2. Bestem en ortonormal basis for $U^\perp$ (det ortogonale komplement til U).
3. Lad P betegne den ortogonale projektion på U. Bestem matricen for P med hensyn til den kanoniske basis i $V = \mathbf{C}^3$.
4. Lad Q betegne den ortogonale projektion på $U^\perp$. Bestem matricen for Q med hensyn til den kanoniske basis i $V = \mathbf{C}^3$.
5. Der er givet vektoren
$$v = \begin{bmatrix} 2i \\ 3 \\ 2+8i \end{bmatrix}.$$
Bestem $u \in U$ og $w \in U^\perp$, således at $v = u + w$.

Opgave 2. Der er givet en reel 3×3 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vis, at det karakteristiske polynomium for A er
$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 18\lambda.$$
2. Bestem egenværdierne for matricen A.
3. Er A invertibel?
4. Er A diagonaliserbar? Hvis den er diagonaliserbar, skal man bestemme en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D, således at $A = PDP^{-1}$. Hvis den ikke er diagonaliserbar, skal man forklare hvorfor.
5. Er A normal?

Opgave 3. I denne opgave er V et reelt vektorrum med $\dim V = 5$. Der er givet en liste $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ af vektorer i V, som er *lineært uafhængige*.

1. For hver af nedenstående 3 lister skal man afgøre, om listen er lineært afhængig eller lineært uafhængig. Svarene skal begrundes.
   (a) Listen $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1, v_3 + v_1, v_3 + v_4\}$.
   (b) Listen $\{v_1 + v_2, v_2 - v_3, 2v_1 + 3v_2 - v_3\}$.
   (c) Listen $\{v_1 + v_3, v_1 + 3v_2 - 2v_3, 2v_1 + v_2\}$.
2. Sæt
$$\begin{aligned} U &= \operatorname{span}(v_1 + v_2, v_2 - v_3, 2v_1 + 3v_2 - v_3), \\ W &= \operatorname{span}(v_1 + v_3, v_1 + 3v_2 - 2v_3, 2v_1 + v_2). \end{aligned}$$
   (a) Bestem $\dim U$.
   (b) Bestem $\dim W$.
   (c) Bestem en basis for $U \cap W$, og bestem derefter $\dim(U \cap W)$.

Opgave 4. En funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er givet ved
$$f(x,y) = \frac{2 + x^2y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

1. Gør rede for, at $f(x,y) = f(y,x)$ for alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Gør tilsvarende rede for, at der gælder
$$f(x,y) = f(x,-y) \quad \text{og} \quad f(x,y) = f(-x,-y)$$
   for alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
2. Vis, at f er differentiabel på $\mathbf{R}^2$. Angiv Jacobimatricen for f.
3. Vis at de fem punkter
$$(0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1),\ (-1,1)$$
   er de eneste kritiske punkter for f.
4. Beregn Hesse matricen for f. Brug den til at afgøre, for hvert af de fem kritiske punkter, om det er et lokalt maksimum punkt, lokalt minimum punkt, eller et saddelpunkt. *Hint:* Udnyt de egenskaber ved f (symmetrier), der er vist i delspørgsmål 1.
5. Sæt $M = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$. Gør rede for, at på M har f både et globalt maksimum og et globalt minimum. Bestem den maksimale værdi og den minimale værdi af f på M.
6. Har f et globalt maksimum på $\mathbf{R}^2$? Svaret skal begrundes.
7. Har f et globalt minimum på $\mathbf{R}^2$? Svaret skal begrundes.