Mat3 og MatØk3
Linearitet og differentiabilitet

Skriftlig eksamen
15. marts 2012

Dato: 15. marts 2012

Tidspunkt: 08:15–14:15

Sted: Fr. Bajers Vej 7G

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Vedr. besvarelsen: Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1. I denne opgave er V et reelt vektorrum med $\dim V = 6$. Der er givet en liste $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ af vektorer i V, som er *lineært uafhængige*.

1. For hver af nedenstående 3 lister skal man afgøre, om listen er lineært afhængig eller lineært uafhængig. Svarene skal begrundes.
   (a) Listen $\{v_2 - v_3, v_3 - v_4\}$.
   (b) Listen $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4\}$.
   (c) Listen $\{v_1 + 2v_2 - v_3, 2v_2 + v_3 + v_4, v_1 - 2v_3 - v_4\}$.
2. Sæt $U_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ og $U_2 = \operatorname{span}(v_2, v_4)$. Besvar følgende spørgsmål:
   (a) Bestem $\dim U_1$.
   (b) Bestem $\dim U_2$.
   (c) Bestem $\dim(U_1 + U_2)$.
   (d) Bestem $\dim(U_1 \cap U_2)$.

Opgave 2. I denne opgave bruger vi de reelle vektorrum $\mathbf{R}^2$ og $\mathbf{R}^4$, med de kanoniske baser og det sædvanlige indre produkt. En lineær afbildning

$$S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^2)$$

er givet ved sin matrix med hensyn til de kanoniske baser som

$$\mathcal{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem en basis for $\operatorname{range} S$ og angiv dimensionen af $\operatorname{range} S$.
2. Bestem en basis for $\operatorname{null} S$ og angive dimensionen af $\operatorname{null} S$.
3. Bestem en basis for et underrum W af $\mathbf{R}^4$, således at $W \perp \operatorname{null} S$ og $W + \operatorname{null} S = \mathbf{R}^4$.
4. Bestem en *ortonormal* basis for $\operatorname{null} S$.

Opgave 3. En kompleks 3×3 matrix C er givet ved

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

1. Bestem egenværdierne for C.
2. Bestem den adjungerede matrix C^* og udregn derefter $B = C^*C$.
3. Gør rede for, at B er diagonaliserbar.
4. Bestem en diagonalmatrix D og en unitær matrix U, således at
$$B = U^*DU.$$
5. Er C diagonaliserbar?

Opgave 4. Funktionen $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er givet ved

$$g(x,y) = \tfrac{1}{3}x^3 + xy + \tfrac{1}{2}y^2, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Gør rede for, at g er differentiabel på $\mathbf{R}^2$, og bestem Jacobi matricen for g.
2. Vis, at $(0,0)$ og $(1,-1)$ er de eneste kritiske punkter for g.
3. Beregn Hesse matricen for g. Brug den til at afgøre, for hvert af de to kritiske punkter, om det er et lokalt maksimum punkt, lokalt minimum punkt, eller et saddelpunkt.
4. Har g et globalt maksimum på $\mathbf{R}^2$? Svaret skal begrundes.
5. Har g et globalt minimum på $\mathbf{R}^2$? Svaret skal begrundes.
6. Sæt $M = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Gør rede for, at på M har g både et globalt maksimum og et globalt minimum. Bestem den maksimale værdi og den minimale værdi af g på M.