Nedenfor giver jeg besvarelse af tre proof-writing exercises (PWE) fra [LNS]. De er givet for at vise mulige måder at formulere en besvarelse på. I starten af hver opgave gentager jeg ganske kort opgaveformuleringen.

Chapter 6, PWE 8. V er et endeligedimensionalt vektorrum over $\mathbf{F}$. Der er givet $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Vi skal vise, at $T \circ S$ er invertibel, hvis og kun hvis både S og T er invertible.

Antag, at S og T er invertible. Sæt $X = S^{-1} \circ T^{-1}$. Vi regner, idet vi udnytter associativitet af sammensætning af operatorer:

$$X \circ (T \circ S) = (S^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ S) = S^{-1} \circ (T^{-1} \circ T) \circ S = S^{-1} \circ S = I.$$

En tilsvarende udregning viser $(T \circ S) \circ X = I$. Hermed er vist, at $T \circ S$ er invertibel. Vi har samtidig vist, at

$$(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}.$$

Antag, at $T \circ S$ er invertibel. Vi bruger nu Theorem 6.7.6 flere gange. Da $T \circ S$ er invertibel, er den surjektiv. Lad $v \in V$ og bestem $w \in V$, så at $(T \circ S)w = v$. Så er $T(Sw) = v$, og vi har vist T er surjektiv. Men så er T invertibel. Antag $Su = 0$. Så er $T(Su) = T0 = 0$. Men $T \circ S$ er injektiv, så $u = 0$. Vi har vist, at S er injektiv, og dermed invertibel. Hermed er vist, at både S og T er invertible.

Chapter 7, PWE 7. V er et komplekst vektorrum, $p(z) \in \mathbf{C}[z]$ af grad $n \geq 1$. Vis, at λ er en egenværdi for $p(T)$, hvis og kun hvis μ er en egenværdi for T og samtidig $p(\mu) = \lambda$.

Antag, at μ er en egenværdi for T. Vi sætter $\lambda = p(\mu)$. Vi sætter $q(z) = p(z) - \lambda$. Så har polynomiet $q(z)$ en rod μ, dvs $q(\mu) = 0$, og vi kan derfor faktorisere som $q(z) = q_1(z)(z - \mu)$. Det giver da $p(T) - \lambda I = q(T) = q_1(T)(T - \mu I)$. Lad nu $v \in V$, $v \neq 0$, $(T - \mu I)v = 0$. Så viser denne ligning, at $(p(T) - \lambda I)v = q_1(T)(T - \mu I)v = 0$, altså er λ en egenværdi for $p(T)$.

Antag, at λ en egenværdi for $p(T)$. Polynomiet $p(z) - \lambda$ kan faktoriseres som

$$p(z) - \lambda = c(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n), \quad c \neq 0.$$

Det giver

$$p(T) - \lambda I = c(T - \mu_1 I)(T - \mu_2 I) \cdots (T - \mu_n I).$$

Lad $v \in V$, $v \neq 0$, så at $(p(T) - \lambda I)v = 0$. Så gælder, at vi har

$$0 = (p(T) - \lambda I)v = c(T - \mu_1 I)(T - \mu_2 I) \cdots (T - \mu_n I)v.$$

Men så findes et j, $1 \leq j \leq n$, så at $\operatorname{null}(T - \mu_j I) \neq \{0\}$. Altså er μ_j en egenværdi for T. Endvider gælder, at $p(\mu_j) - \lambda = 0$. Hermed er resultatet vist.

Chapter 7, PWE 11. Vi har $P \in \mathcal{L}(V)$, så at $P^2 = P$. Vi skal vise, at

$$V = \operatorname{null}(P) \oplus \operatorname{range}(P).$$

Vi viser først $V = \operatorname{null}(P) + \operatorname{range}(P)$. Lad $v \in V$ være givet. Så er $v = (I - P)v + Pv$. Det er klart, at $Pv \in \operatorname{range}(P)$. Vi har $P(I - P)v = (P - P^2)v = 0$, så $(I - P)v \in \operatorname{null}(P)$. Altså har vi vist, at $V = \operatorname{null}(P) + \operatorname{range}(P)$.

Vi viser dernæst, at $\operatorname{null}(T) \cap \operatorname{range}(P) = \{0\}$. Lad $v \in \operatorname{null}(T) \cap \operatorname{range}(P)$. Da $v \in \operatorname{range}(P)$, findes et $u \in V$, så at $v = Pu$. Da $v \in \operatorname{null}(P)$, ved vi, at $Pv = 0$. Men $0 = Pv = P(Pu) = P^2u = Pu = v$. Hermed er vist, at $\operatorname{null}(T) \cap \operatorname{range}(P) = \{0\}$. Direkte sum resultatet følger nu af Proposition 4.4.6.