

Mat3 og MatØk3

Linearitet og differentiabilitet

Skriftlig prøveeksamen
Januar 2013

Dato: Januar 2013

Tidspunkt: Selvvalgt

Sted: Selvvalgt

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Vedr. besvarelsen: Svar på de enkelte delspørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til bog og/noter, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1. Lad $\{e_1, e_2, e_3\}$ være den kanoniske basis i $\mathbf{C}^3$ (med det sædvanlige indre produkt). En lineær afbildning $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3, \mathbf{C}^3)$ er givet ved

$$Te_1 = ie_1 + e_2 - e_3, \quad Te_2 = ie_2 + e_3, \quad Te_3 = 2ie_1 + (2+i)e_2 - e_3.$$

1. Bestem matricen for T med hensyn til den kanoniske basis i $\mathbf{C}^3$.
2. Bestem en basis for $\text{null}(T)$. Angiv dimensionen af $\text{null}(T)$.
3. Bestem en basis for $\text{range}(T)$. Angiv dimensionen af $\text{range}(T)$.
4. Er den lineære afbildning T invertible?
5. Er den lineære afbildning T normal?

Opgave 2. I denne opgave er $V = \mathbf{C}^4$ med det sædvanlige indre produkt. Der er givet tre vektorer

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi sætter $U = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Bestem dimensionen af U .
2. Bestem en ortonormal basis for U .
3. Bestem en ortonormal basis for $U^\perp$ (det ortogonale komplement til U).
4. Lad P betegne den ortogonale projektion på U . Bestem matricen for P med hensyn til den kanoniske basis i $V = \mathbf{C}^4$.

Opgave 3. Der er givet to komplekse vektorrum V og W med $\dim V = 5$ og $\dim W = 4$. De følgende to spørgsmål 1. og 2. er uafhængige. Læs antagelserne i hvert delspørgsmål omhyggeligt! Svarene skal begrundes.

1. Der er givet $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Antag, at T er surjektiv.
 - (a) Bestem $\dim \text{null}(T)$.
 - (b) Der er givet $w_j \in \text{range}(T)$, $j = 1, 2, 3$. Vælg $v_j \in V$ med $Tv_j = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Antag, at listen $\{w_1, w_2, w_3\}$ er lineært uafhængig. Hvad gælder så for listen $\{v_1, v_2, v_3\}$? Er den altid lineært uafhængig eller lineært afhængig, eller kan begge tilfælde forekomme?
 - (c) Der er givet $u \in \text{null}(T)$, $u \neq 0$ og $v \in V$, $v \notin \text{null}(T)$. Er $\{u, v\}$ lineært uafhængig eller lineært afhængig, eller kan begge tilfælde forekomme?

- (d) Der er givet $\tilde{w}_j \in \text{range}(T)$, $j = 1, 2, 3$. Vælg $\tilde{v}_j \in V$ med $T\tilde{v}_j = \tilde{w}_j$, $j = 1, 2, 3$. Antag, at listen $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3\}$ er lineært afhængig. Hvad gælder så for listen $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$? Er den altid lineært uafhængig eller lineært afhængig, eller kan begge tilfælde forekomme?

2. Der er givet $S \in \mathcal{L}(W, V)$.

(a) Er S surjektiv?

- (b) Der er givet $y_j \in \text{range}(S)$, $j = 1, 2, 3$. Vælg $x_j \in V$ med $Sx_j = y_j$, $j = 1, 2, 3$. Antag, at listen $\{y_1, y_2, y_3\}$ er lineært uafhængig. Hvad gælder så for listen $\{x_1, x_2, x_3\}$? Er den altid lineært uafhængig eller lineært afhængig, eller kan begge tilfælde forekomme?

Opgave 4. En funktion $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ er givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{for } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Er f kontinuert i $(0, 0)$? Svaret skal begrundes.
2. Vis, at f er differentiabel på $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Angiv Jacobimatricen for f .
3. Eksisterer de partielle afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)?$$

Svaret skal begrundes.

4. Er f differentiabel i $(0, 0)$? Svaret skal begrundes.
5. Vis, at de kritiske punkter for f på $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ er alle punkter givet ved

$$\{(t, 0) \mid t \neq 0\} \quad \text{og} \quad \{(0, t) \mid t \neq 0\}.$$

6. Vis, at f har både et globalt maksimum og et globalt minimum på $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Bestem værdien af begge globale ekstrema. *Hint:* Brug polære koordinater.