Eksamen i Analyse 2
Torsdag d.11 juni 2015, 09:00-13:00, lokale G5-112

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka $45 - 50$ point. For et 12 tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv. Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

Opgave 1.
(i). Afgør om de følgende rækker er absolut konvergente, betinget konvergente eller divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!}.$$

(ii). Betragt funktionen

$$f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{(2x-2)^n}{n2^n+1}.$$

Find konvergensintervallet for f. Beregn f' og bestem konvergensintervallet for potensrækken som definerer f'.

Opgave 2. Betragt følgen af funktioner $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, givet af:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx^2, & \text{hvis } 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{n}}; \\ 1, & \text{hvis } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(i). Tegn f_n for $n = 1, 2, 3$ og afgør, om de er kontinuerte på $[0,1]$.
(ii). Konvergerer følgen ligeligt? Angiv en begrundelse.

Opgave 3. Lad $\mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ være givet af $\mathbf{h}(u_1, u_2, v) = [u_1 + e^{u_2 v} - 3, u_1(u_2 - 1)]$.
(i). Vis, at $\mathbf{h}(2,1,0) = [0,0]$ og $\mathbf{h} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
(ii). Vis, at det må eksistere en $\epsilon > 0$ lille nok og en C^1 funktion $\mathbf{f} : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbb{R}^2$ således at $\mathbf{f}(0) = [2,1]$ og

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}(v), v) = [0,0], \quad \forall v \in (-\epsilon, \epsilon).$$

(iii). Find $\mathbf{f}'(0)$.

Opgave 4. Betragt den følgende differentialligning:

$$x'(t) = e^{x(t)}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Definer $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, og betragt $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(t,x) := g(x)$. Den ovenstående ligning kan omskrives som $x'(t) = f(t, x(t))$, hvor $x(\cdot)$ er defineret på et åbent interval som indeholder 0 og $x(0) = x_0$.

(i). Vis, at $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ og at den opfylder en lokal Lipschitz betingelse. Opfylder f en global Lipschitz betingelse?

(ii). Antag, at en løsning $x(\cdot)$ eksisterer på intervallet $0 \leq t < T$. Bevis, at $e^{-x(t)} + t$ er konstant på intervallet $[0, T)$.

(iii). Find det største interval $I \subset \mathbb{R}$ med $0 \in I$, hvor man kan finde en entydig løsning $x : I \mapsto \mathbb{R}$ til den givne ligning.