PRØVEEKSAMEN, ANALYSE 2

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka 45–50 point. For et 12-tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv.

Opgave 1 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = (1+x-x^2)(\ln(y+\frac{1}{2}) - y + 1) + (x-\frac{1}{2})^3$.

(a) Find alle kritiske punkter for f på $(0,\frac{3}{2}) \times (0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{3}{2}, 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ og afgør, om de er hhv. maksimums-, minimums- eller saddelpunkter.

(b) Find $\max\{f(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{3}{2}, 0 \le y \le 1\}$ og $\max\{f(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ idet det oplyses, at $\ln(2) \approx 0{,}7$ og $\ln(1{,}5) \approx 0{,}4$ og at maksimum ikke antages i linjerne $x = 0$, $y = 0$ eller $y = 1$.

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f(t,(x_1,x_2)) = (x_2,x_1)$.

(a) Vis, at der eksisterer en entydig, *global* løsning $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t,y(t))$, $y(0) = (1,0)$.

(b) Lad h_1 og h_2 betegne h's koordinatfunktioner, $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$. Vis, at $h_1(t) - h_2(t) = e^{-t}$.

Opgave 3 (30 POINT)

Lad $B([0,1],\mathbb{R})$ betegne mængden af begrænsede, reelle funktioner på $[0,1]$. Definér $T\colon B([0,1],\mathbb{R}) \to B([0,1],\mathbb{R})$ ved

$$(T(f))(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{2} & \text{for } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{f(x)+1}{2} & \text{for } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

(a) Giv et abstrakt argument for, at der eksisterer en funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, så $T(g) = g$.

(b) Find g.

(c) Lad $f_0(x) = x(1-x) \in B([0,1],\mathbb{R})$ og $f_{n+1} = T(f_n)$ for $n \ge 0$. Konvergerer f_n punktvist og/eller uniformt mod g?

Opgave 4 (10 POINT)

Find Taylorrækken for $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i punktet 1 og bestem konvergensradius.

Opgave 5 (20 POINT)

(a) Gør rede for, at der eksisterer et $\delta > 0$ og en funktion $W_0\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$, så $x = W_0(x)e^{W_0(x)}$ for alle $x \in (-\delta,\delta)$.

(b) Find $W_0'(0)$.