Reeksamen i Analyse 2
Tirsdag d.18 august 2015, 09:00-13:00

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka $45 - 50$ point. For et 12 tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv. Husk at skrive jeres fulde navn og studienummer på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelsen.

Opgave 1.

(i). Betragt potensrækken

$$f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{n+1}.$$

Find konvergensintervallet for f.

(ii). Beregn potensrækken for f' og bestem konvergensintervallet for potensrækken som definerer f'.

Opgave 2. Betragt følgen af funktioner $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, givet af:

$$f_n(x) := \frac{nx+1}{n+x}.$$

(i). Argumenter for, at alle f_n er kontinuerte på $[0,1]$.

(ii). Konvergerer følgen ligeligt? Angiv en begrundelse.

Opgave 3. Lad $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ være givet af $\mathbf{h}(u,v) = u + 2\cos(uv) - 4$.

(i). Vis, at $\mathbf{h}(2,0) = 0$ og $\mathbf{h} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(ii). Vis, at det må eksistere en $\epsilon > 0$ lille nok og en C^1 funktion $f : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbb{R}$ således at $f(0) = 2$ og

$$\mathbf{h}(f(v), v) = 0, \quad \forall v \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Find $f'(0)$.

(iii). Kan implicitfunktionssætningen anvendes til at udtrykke v som en C^1 funktion $g(u)$ i nærheden af $u = 2$ således at $g(2) = 0$ og $\mathbf{h}(u, g(u)) = 0$?

Opgave 4. Betragt den følgende ikke-lineær differentialligning:

$$x'(t) = -\sin\big(x(t)\big)x(t), \quad x(0) = 1.$$

Betragt $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(t,x) := -\sin(x)x$. Den ovenstående ligning kan omskrives som $x'(t) = f(t, x(t))$, hvor $x(\cdot)$ er defineret på et åbent interval som indeholder 0, og $x(0) = 1$.

(i). Vis, at $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ og at den opfylder en lokal Lipschitz betingelse.

(ii). Antag, at en løsning $x(\cdot)$ kan konstrueres på intervallet $0 \leq t < T$. Bevis, at $x(t) > 0$ på $0 \leq t < T$. (Vink: brug entydigheden til at vise, at hvis $x(t_1) = 0$ i et punkt $t_1 \in [0,T)$ så må $x(t) = 0$ for alle t.)

(iii). Vis, at $x(t) < \pi/2$ på $0 \leq t < T$. (Vink: antag, at der findes $0 < t_1 < T$ således at $x(t_1) = \pi/2$ og $0 < x(t) < \pi/2$ på $(0, t_1)$. Ifølge middelværdisætningen skal der eksistere et $c \in (0, t_1)$ således at $x(t_1) - x(0) = x'(c)(t_1 - 0) = -\sin(x(c))x(c)t_1$. Er det muligt?)