Taylorpolynomier og -rækker samt lokale ekstrema for funktioner af flere variable

Morten Grud Rasmussen
1. marts 2016

1 Taylors Sætning for funktioner af én variabel

Sætning 1.1 (Taylors Sætning med restled). *Lad $k \in \mathbb{N}$, $x_0, x \in A \subset \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ og $f\colon A \to \mathbb{R}$ opfylde, at den j'te afledede $f^{(j)}$ af f eksisterer og er kontinuert på det lukkede interval mellem x_0 og x og differentiabel på det åbne interval mellem x_0 og x for alle $j \leqslant k$. Så findes et punkt c strengt mellem x_0 og x så*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}. \tag{1}$$

Bevis. For $x \neq x_0$ findes netop én løsning $M \in \mathbb{R}$ til ligningen

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + M(x - x_0)^{k+1}.$$

Vi vil vise, at $M = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}$ for et c mellem x_0 og x. For at vise dette, definerer vi funktionen $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ på følgende måde:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x - t)^j + M(x - t)^{k+1}.$$

Ifølge antagelserne er F kontinuert på det lukkede interval mellem x_0 og x og differentiabel på det åbne interval mellem x_0 og x. Vi har valgt M, således at $F(x_0) = f(x)$, og vi har desuden, at $F(x) = \frac{f^{(0)}(x)}{0!}0^0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \cdot 0^j + M \cdot 0^{k+1} = f(x)$. Dermed kan vi anvende Middelværdisætningen på F på intervallet mellem x_0 og x og får eksistensen af et c mellem x_0 og x så

$$F'(c) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Men

$$F'(c) = f'(c) + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{f^{(j+1)}(c)}{j!}(x - c)^j - \frac{f^{(j)}(c)}{(j-1)!}(x - c)^{j-1} \right) - M(k+1)(x - c)^k,$$

hvor alle led umiddelbart går ud med hinanden parvist, bortset fra de to led i

$$\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x - c)^k - M(k+1)(x - c)^k,$$

som dermed må summe til 0, da $F'(c) = 0$, og dermed er

$$M = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)k!} = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}$$

som påstået. $\square$

2 Taylors Sætning for funktioner af flere variable

Før vi formulerer og beviser Taylors Sætning for funktioner af flere variable, vil vi først introducere en meget nyttig og - anvendt notation.

Definition 2.1 (Multi-indeks-notation)**.** Et *multi-indeks* er en n-tupel af ikke-negative heltal $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. For to multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ og et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ defineres:

1. Sum/differens: $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$.
2. Absolutværdi: $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
3. Fakultet: $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
4. Potens: $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.
5. Partielt afledet af højere orden: $\partial^\alpha = \prod_{i=1}^n \partial_i^{\alpha_i}$ hvor $\partial_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

Sætning 2.2 (Taylors Sætning med restled)**.** *Lad $k \in \mathbb{N}$, $x_0, x \in A \subset \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$ og $f\colon A \to \mathbb{R}$ opfylde, at $\partial^\alpha f$ eksisterer og er differentiabel på linjestykket $L = \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$ mellem x_0 og x for $|\alpha| \leqslant k$. Så eksisterer et $y \in \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$ så*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Bevis. Da $\partial^\alpha f$ er antaget differentiabel på L for alle $|\alpha| \leqslant k$, så må $L \subset A$ og $x_0, x \in A$ være indre punkter, og vi kan finde et $r > 0$ så $F\colon (-r, 1+r) \to \mathbb{R}$ givet ved $F(t) = f((1-t)x_0 + tx)$ er veldefineret og $k+1$ gange differentiabel på $[0,1]$. Dermed kan vi anvende Sætning 1.1 på F med $x_0 = 0$ og $x = 1$:

$$F(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \frac{F^{(k+1)}(c)}{(k+1)!},$$

hvor $c \in (0,1)$. Kædereglen giver nu:

$$F^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{j!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)((1-t)x_0 + tx)(x - x_0)^\alpha,$$

se Opgave 1, hvoraf resultatet følger med $y = (1-c)x_0 + cx$. $\square$

Bemærk, at for $n = 1$ reducerer Sætning 1.1 til Sætning 2.2, dog med den ekstra antagelse, at $f^{(k+1)}$ også eksisterer i x_0 og x.

3 Taylorrækker

Idéen bag Sætning 1.1 og 2.2 er, at man approksimerer en funktion f med et polynomium af grad k – et såkaldt Taylorpolynomium – og kvaliteten af approksimationen kan så vurderes vha. det såkaldte restled:

Definition 3.1 (Restled)**.** Lad antagelserne i Sætning 1.1 være opfyldt. Så kaldes

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

i (1) for et *restled*. Ligeledes kaldes $R_k(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$ for restledet i Sætning 2.2.

Bemærk i øvrigt, at $R_k(x)$ også afhænger af x gennem hhv. c og y. I Opgave 2 og 3 skal du, givet en yderligere antagelse, finde vurderinger af restledene, som ikke afhænger af c hhv. y.

Hvis $A \subset \mathbb{R}$ og funktionen $f \colon A \to \mathbb{R}$ er uendeligt ofte differentiabel,[1] dvs. hvis $f^{(k)}$ eksisterer for alle $k \in \mathbb{N}$, så kan vi naturligvis finde et Taylorpolynomium af vilkårlig høj grad. Dette fører naturligt til følgende definition.

Definition 3.2 (Taylorrække)**.** Lad $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$ og $f \colon A \to \mathbb{R}$ være uendeligt ofte differentiabel. Så kaldes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

for *Taylorrækken for f i punktet x_0*.

Det er klart, at sætter vi $T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, så er $T_f(x_0) = f(x_0)$. Det er dog langt fra sikkert, at $T_f(x) = f(x)$ for andre $x \in A$, eksempelvis kan rækken have konvergensradius 0. Hvad værre er, selv, hvis rækken har positiv – sågar uendelig – konvergensradius, kan vi have at $T_f \neq f$. Se Opgave 4 for et eksempel.

Funktioner, som er lig med deres Taylorrækker, viser sig at være så specielle, at de fortjener et navn.

Definition 3.3 (Analytisk funktion)**.** Lad $A \subset \mathbb{R}$ og $f \colon A \to \mathbb{R}$ være uendeligt ofte differentiabel. Hvis der for ethvert $x_0 \in A$ findes et $R > 0$ så

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

for $x \in B_R(x_0)$, så kaldes f *(reel) analytisk*.

[1] Man kalder sommetider en uendeligt ofte differentiabel funktion for *glat*.

Vi skal senere se, at potensrækker er analytiske indenfor deres konvergensradius, og det vil fremgå af beviset, at man kan differentiere potensrækker med positiv konvergensradius ledvist.

4 Lokale ekstrema for funktioner af flere variable

I dette afsnit vil vi anvende Taylors Sætning til at finde kriterier for, om kritiske punkter er lokale ekstrema eller saddelpunkter. Vi begynder med nogle definitioner og småresultater.

Definition 4.1 (Hilbert-Schmidt-norm af en matrix)**.** Lad $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ være en $n \times n$-matrix. Så kaldes

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

for A's *Hilbert-Schmidt-norm.*

Lemma 4.2. *Lad $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ være en $n \times n$-matrix og $x \in \mathbb{R}^n$. Så er*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|_{\mathrm{HS}}\|x\|.$$

Bevis. Idet Cauchy-Schwartz giver

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(Ax)_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell|^2 = \|A\|_{\mathrm{HS}}^2 \|x\|^2,$$

fås resultatet ved at tage kvadratroden. □

Definition 4.3 (k gange kontinuert differentiabel)**.** Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ være en åben mængde og lad $f\colon A \to \mathbb{R}$ have kontinuerte partielt afledede op til og med k'te orden. Så siges f at være k gange kontinuert differentiabel og vi skriver $f \in C^k(A)$.

Definition 4.4 (Hesse-matrix)**.** Lad $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, A åben og $f \in C^2(A)$. Så kaldes matricen $H(x)$ givet ved

$$h_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad H(x) = (h_{ij}(x))_{i,j=1}^n$$

for *Hesse-matricen for f i x.*

Da $f \in C^2(A)$ er $H(x)$ symmetrisk jf. Sætning 9.17 i bogen.

Lemma 4.5. *Lad $x, x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ opfylde at A er åben og at $L = \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\} \subset A$, og antag at $f \in C^2(A)$. Så findes et $y \in \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$ så*

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle x - x_0, H(y)(x - x_0) \rangle.$$

Bevis. Opgave 6. □

Sætning 4.6. *Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ er åben, at $f \in C^2(A)$, at $x_0 \in A$ er et kritisk punkt for f og at alle Hesse-matricen $H(x_0)$'s egenværdier er positive. Så er x_0 et lokalt minimumspunkt for f. Hvis alle $H(x_0)$'s egenværdier omvendt er negative, er x_0 et lokalt maksimumspunkt for f.*

Bevis. Antag uden tab af generalitet at alle egenværdier for $H(x_0)$ er positive. Da $H(x_0)$ er reel og symmetrisk er den selvadjungeret og spektralsætningen giver, at $H(x_0)$ har n reelle, ortonormale egenvektorer e_i, $i = 1, \dots, n$ med tilhørende egenværdier λ_i. Vi kan derfor for $z \in \mathbb{R}^n$ skrive

$$z = \sum_{i=1}^{n} \langle z, e_i \rangle e_i$$

og dermed

$$H(x_0)z = \sum_{i=1}^{n} \langle z, e_i \rangle \lambda_i e_i$$

eller

$$\langle z, H(x_0)z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle z, e_i \rangle^2.$$

Lad $m = \min\{\lambda_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} > 0$. Så er

$$\langle z, H(x_0)z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle z, e_i \rangle^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} m \langle z, e_i \rangle^2 = m\|z\|^2.$$

Sæt $A(x) = H(y) - H(x_0)$, som afhænger af x gennem $y \in \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$. Da $f \in C^2(A)$ er $\|A(x)\|_{\mathrm{HS}}$ kontinuert og vi kan finde $r > 0$ så $x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$ medfører, at $\|A(x)\|_{\mathrm{HS}} \leqslant \frac{1}{2}m$. Anvender vi nu Lemma 4.5 på $x \in B_r(x_0)$ fås

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle x - x_0, H(y)(x - x_0) \rangle \\
&= f(x_0) + 0 + \frac{1}{2}(\langle x - x_0, H(x_0)(x - x_0) \rangle + \langle x - x_0, A(x)(x - x_0) \rangle) \\
&\geqslant f(x_0) + \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 (m - \tfrac{1}{2}m) = f(x_0) + \frac{m\|x - x_0\|^2}{4},
\end{aligned}$$

hvor vi igen brugte Cauchy-Schwartz. □

Sætning 4.7. *Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ er åben, at $f \in C^2(A)$, at $x_0 \in A$ er et kritisk punkt for f og at Hesse-matricen $H(x_0)$ har både positive og negative egenværdier. Så er x_0 et saddelpunkt for f.*

Bevis. Lad e_+ være en normeret egenvektor for $H(x_0)$ med positiv egenværdi λ_+ og e_- en normeret egenvektor for $H(x_0)$ med negativ egenværdi λ_-. Lad $A(x) = H(y) - H(x_0)$ som i beviset for Sætning 4.6. Vælg $r > 0$ så $\|A(x)\|_{\mathrm{HS}} \leqslant \frac{1}{2}\min\{|\lambda_\pm|\}$ for $x \in B_r(x_0) \backslash \{x_0\}$. Så giver Lemma 4.5 for $0 < |t| < r$

$$\begin{aligned}
f(x_0 + te_+) &= f(x_0) + \frac{1}{2}(\langle te_+, H(x_0)te_+ \rangle + \langle te_+, A(x_0 + te_+)te_+ \rangle) \\
&\geqslant f(x_0) + \frac{t^2}{2}(\lambda_+ - \tfrac{1}{2}\lambda_+) = f(x_0) + \frac{t^2\lambda_+}{4}
\end{aligned}$$

og tilsvarende fås

$$\begin{aligned}
f(x_0 + te_-) &= f(x_0) + \frac{1}{2}(\langle te_-, H(x_0)te_- \rangle + \langle te_-, A(x_0 + te_-)te_- \rangle) \\
&\leqslant f(x_0) + \frac{t^2}{2}(\lambda_- + \frac{1}{2}|\lambda_-|) = f(x_0) + \frac{t^2\lambda_-}{4}.
\end{aligned}$$

Da $\lambda_+ > 0$ og $\lambda_- < 0$ er $f(x_0)$ således hverken lokalt maksimum eller minimum. □

5 Opgaver

Opgave 1. Bevis at

$$F^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)((1-t)x_0 + tx)(x - x_0)^\alpha,$$

hvor F er som i beviset for Sætning 2.2.
Vink: Bevis ved induktion i j.

Opgave 2. Antag, at $f^{(k+1)}$ er kontinuert på det lukkede interval mellem x_0 og x. Brug dette til at finde en vurdering af restledet $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$ fra Sætning 1.1, som ikke afhænger af c.

Opgave 3. Antag, at $\partial^\alpha f$ er kontinuert på enten $\overline{B_r}(x_0) \ni x$ eller $L = \{(1-t)x_0 + tx \in \mathbb{R}^n \,|\, t \in [0,1]\}$. Brug dette til at finde en vurdering af restledet $R_k(x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$ fra Sætning 2.2, som ikke afhænger af y.

Opgave 4. Lad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leqslant 0 \end{cases}$. Find Taylorrækken T_f for f i 0 og konvergensradius for T_f.
Vink: Vis, at $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p_{2(k-1)}(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leqslant 0 \end{cases}$, hvor p_j er et j'tegradspolynomium.

Opgave 5. Kan du sige noget om definitionsmængden for en analytisk funktion?

Opgave 6. Bevis Lemma 4.5.
Vink: Det er blot Taylors Sætning for $k = 2$ formuleret vha. gradient og Hesse-matrix.

Opgave 7. Find sammenhængen mellem Sætningerne 4.6 og 4.7 i tilfældet $n = 2$ og ABC-kriteriet fra bogen.

Opgave 8 (Valgfri)**.** Hvis nogle af skridtene i beviserne for Sætning 4.6 og 4.7 er uklare, så uddyb skridtene.