Eksamen i Calculus

Onsdag den 1. juni 2011

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER: ☐ Hold 3 (v. Jacob Broe)

☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)

☐ Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (12%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = x + e^x.$$

Opgave 2 (7%)

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \cos(x^3 - y^2).$$

(a) Bestem de partielle afledede $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$.

(b) Bestem den blandede 2. ordens partielle afledede $f_{xy}(x,y)$.

Opgave 3 (10%)

Bestem Taylorpolynomiet af 3. grad for

$$f(x) = \arccos(2x) + x^2 + x,$$

med udviklingspunkt $a = 0$.

Opgave 4 (8%)

Udregn planintegralet

$$\iint_{\mathcal{R}} x \, dA,$$

hvor $\mathcal{R}$ er begrænset i xy-planen af kurverne $y = x^2$ og $x = y^2$.

Opgave 5 (7%)

Løs andengradsligningen

$$z^2 - (2 - i)z = -2 - 2i.$$

Opgave 6 (8%)

Betragt fladen F, der er givet implicit som løsning til ligningen

$$x + 2y^2 + 3z^3 = 17.$$

Find tangentplanen til F gennem punktet $P(6, 2, 1)$.

Opgave 7 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = \sin[\pi(x + y)] + z^3.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.

(b) Bestem den retningsafledede af f i punktet $P(1, 1, 1)$ i retningen givet ved $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Opgave 8 (10%)

Legemet T er i rummet afgrænset af fladerne $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $z = 2$. Massetætheden (densiteten) af T er givet ved $\delta(x, y, z) = z$.

(a) Bestem massen af T.

(b) Massemidtpunktet for T benævnes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Symmetribetragtninger viser, at $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Bestem $\bar{z}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9 og 10 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (6%)

Et legeme T dækker det område i rummet som i sfæriske koordinater er givet ved

$$\{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \phi \leq \pi/3, 0 \leq \rho \leq \pi/4\}.$$

Massetætheden (densiteten) for T er $\delta(x, y, z) = 1$, T's masse benævnes m_T og T's massemidtpunkt betegnes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Hvilke(t) af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme $\bar{x}$ (bemærk: værdien af $\bar{x}$ skal *ikke* udregnes.)

☐ $\frac{1}{m_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\pi/4} \rho^2 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\frac{1}{m_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cos\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cos\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\frac{1}{m_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/3} \rho^2 \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\frac{1}{m_T} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/3} \rho^3 \cos\theta \sin^2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

Opgave 10 (4%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 4. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $p(z)$ har altid mindst én reel rod
☐ $p(z)$ har præcis 4 forskellige komplekse rødder
☐ $p(z)$ har præcis 4 rødder regnet med multiplicitet
☐ Der findes et $z_0 \in \mathbb{C}$, således at $p(z) = (z - z_0)q(z)$ med $q(z)$ et komplekst polynomium af grad 3.

Opgave 11 (12%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. En kontinuert funktion defineret på et område $\mathcal{R}$ i xy-planen har altid et globalt maksimum på $\mathcal{R}$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Planintegralet over området

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

hvor c og d er konstanter og x_1 og x_2 er kontinuerte funktioner, kan evalueres som følgende itererede integrale

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

☐ Sand ☐ Falsk

c. For ethvert valg af konstanten $a \in \mathbb{R}$, har begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + 12y = \cos^3(x) \\ y(5) = 2,\ y'(5) = -6, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

præcis én løsning.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Der findes en kontinuert funktion $f(x, y)$, defineret på $\mathbb{R}^2$, hvor alle retningsafledede eksisterer i $(0, 0)$, men f ikke er differentiabel i $(0, 0)$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. Der findes et komplekst polynomium af grad 9 med reelle koefficienter som ikke kan faktoriseres som et produkt af lineære og kvadratiske reelle faktorer.

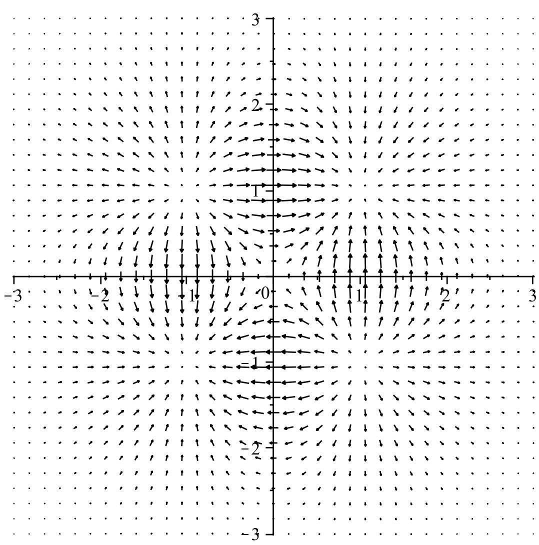
☐ Sand ☐ Falsk

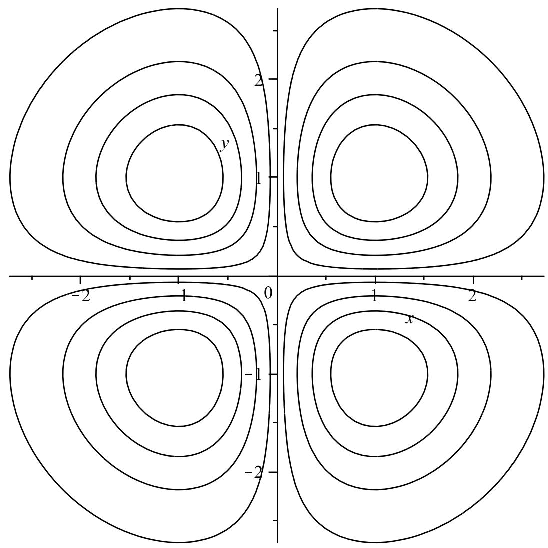
Opgave 12 (8%)

En differentiabel funktion $f(x,y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x,y) : -3 \leq x,y \leq 3\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen på R. Funktionen har fire kritiske punkter i R, med koordinaterne $\pm(1,1)$ og $\pm(1,-1)$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter og markér svaret nedenfor.





(a) I punktet $(1,1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(b) I punktet $(-1,1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(c) I punktet $(-1,-1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(d) I punktet $(1,-1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.