(Prøve)Eksamen i Calculus

Sæt 1, april 2011

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende (prøve)eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (12%)

(a) Find den entydigt bestemte løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0,$$

der opfylder, at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 2.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 2x + 3.$$

Opgave 2 (10%)

Der er givet en funktion $f(x)$ med den egenskab, at dens Taylorpolynomium af 3. grad med udviklingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 6 + 2x - x^2 + 2x^3.$$

(a) Bestem værdien $f(0)$

(b) Bestem værdien $f'(0)$

(c) Bestem værdien $f''(0)$

(d) Bestem værdien $f'''(0)$.

Opgave 3 (7%)

Betragt

$$f(x, y) = 9 + y - y^2 + 2x + xy - 2xy^2.$$

(a) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

(b) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

(c) Bestem en ligning for tangentplanen til fladen $z = f(x, y)$ gennem punktet $(-1, 1, 8)$.

Opgave 4 (10%)

Udregn planintegralet

$$\iint_R x^2 \, dA,$$

hvor R er begrænset i xy-planen af kurverne $y = x^2$ og $y = x^3$.

Opgave 5 (7%)

Løs andengradsligningen

$$z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

Opgave 6 (8%)

Betragt fladen (ellipsoiden), der er givet implicit som løsning til ligningen

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 20.$$

Find tangentplanen til fladen gennem punktet $P(1, 1, 2)$.

Opgave 7 (11%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = e^{x+y} + 2z^2.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.

(b) Bestem den retningsafledede af f i punktet $P(0, 0, 1)$ i retningen givet ved $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Opgave 8 (10%)

Legemet T er i rummet er afgrænset af fladerne $z = x^2 + y^2$ og $z = 1$. Massetætheden af T er givet ved $\delta(x, y, z) = z^2$.

(a) Bestem massen af T.

(b) Massemidtpunktet for T benævnes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Symmetribetragtninger viser, at $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Bestem $\bar{z}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (7%)

Et legeme T dækker netop det område i rummet som i sfæriske koordinater er givet ved

$$\{(\rho,\phi,\theta) : 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 4\}.$$

Massefylden for T er $\delta(x,y,z) = z$. Hvilket af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T's masse.

- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^2 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^2 \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

Opgave 10 (6%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 8 med *reelle koefficienter*. Antag, at $p(z)$ har en faktorisering

$$p(z) = (z-a)q(z),$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ $q(z)$ kan *altid* faktoriseres som et produkt udelukkende bestående af reelle 1. og 2. grads polynomier
- ☐ $q(z)$ indeholder altid mindst én lineær reel faktor
- ☐ $q(z)$ kan faktoriseres udelukkende ved brug af reelle lineære faktorer
- ☐ Man kan ikke afgøre, om $q(z)$ har en reel rod uden at kende koefficienterne i $p(z)$.

Opgave 11 (6%)

Betragt en funktion $f(x, y)$ af to variable defineret på $\mathbf{R}^2$. Det oplyses at samtlige retningsafledede $D_{\mathbf{u}} f(P)$ eksisterer i punktet $P(a, b)$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

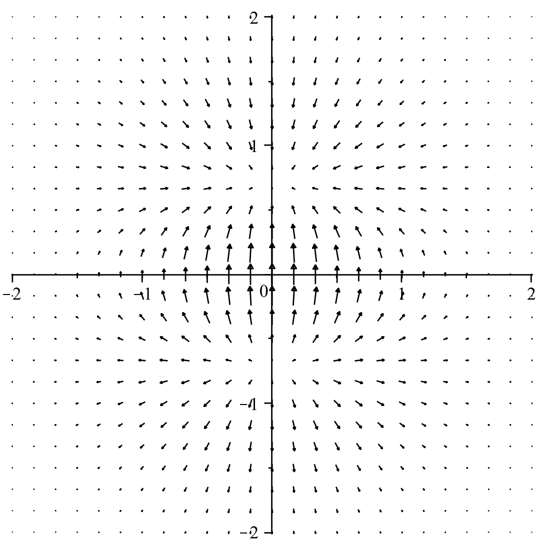
- ☐ f er kontinuert i $P(a, b)$
- ☐ De partielle afledede f_x og f_y eksisterer i en omegn af $P(a, b)$
- ☐ De partielle afledede f_x og f_y eksisterer i $P(a, b)$
- ☐ Man kan ikke, udfra de givne oplysninger konkludere, at f er differentiabel i $P(a, b)$.

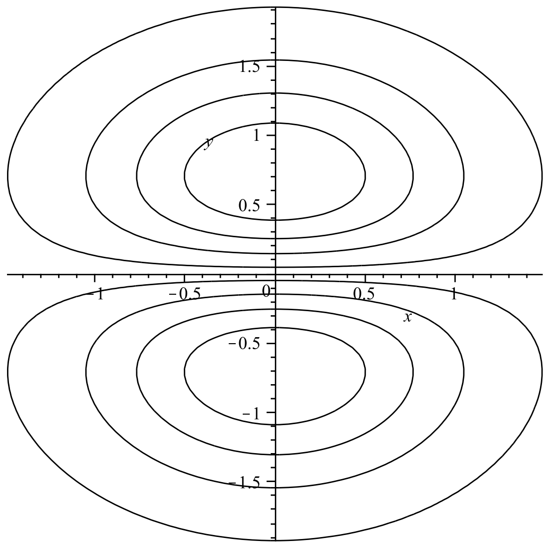
Opgave 12 (6%)

En funktion $f(x, y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x, y) : -2 \leq x, y \leq 2\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen i dette kvadrat. Funktionen har to kritiske punkter i R, med koordinaterne $(0, \pm 1/\sqrt{2})$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter og markér svaret nedenfor.





(a) Punktet $(0, 1/\sqrt{2})$ er et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(b) Punktet $(0, -1/\sqrt{2})$ er et

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.